A 566009

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

ENGINEERING
LIBRARY
TA
350
.R92
1845

Digitized by Google

Die

technische Mechanik

als Vorbereitung
für das Studium der Maschinenlehre, des Maschinenbaues
und der Ingenieur-Wissenschaften,

zunächst als

Leitfaden

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten,

sowie

zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung
der Differenzial- und Integral-Rechnung

von

Dr. *Moritz Rühlmann*,

Professor der angewandten Mathematik und Maschinenlehre an der königlichen
höheren Gewerbschule zu Hannover.

Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Erster Theil.

Die Geostatik.

Mit vielen Holzschnitten.

Dresden und Leipzig,
Arnoldische Buchhandlung.
1845.

Die
Geostatik
als
Leitfaden
für den
Unterricht an technischen Lehranstalten,
sowie
zum Gebrauche für Techniker überhaupt, ohne Anwendung der Differenzial- und Integral-Rechnung

von

Dr. *Moritz Rühlmann*,
Professor der angewandten Mathematik und Maschinenlehre an der königlichen höheren Gewerbschule zu Hannover.

Zweite, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Mit vielen Holzschnitten.

Dresden und Leipzig,
Arnoldische Buchhandlung.
1845.

Vorwort.

Die zweite Auflage dieses Leitfadens ist sowohl entsprechend der günstigen Aufnahme, welche die erste Ausgabe gefunden hat, als auch den gegenwärtigen Anforderungen, die man von einem vorzugsweise für künftige Techniker bestimmten Buche machen kann und muß, umgearbeitet und mit mehrfachen Zusätzen, Beispielen etc. versehen worden. Namentlich habe ich, nach den eigenen Erfahrungen im Lehrfache, geglaubt, die Theorie der Kräftepaare, so wie auch nach mehrseitig ausgesprochenem Wunsche, Einiges über Stabilität der Körper aufnehmen zu müssen.

Die Ableitung der Hauptsätze in §. 18 ohne Zuziehung der Kräftepaare zu machen, schien mir aus mehrfachen Gründen, besonders aber deshalb wünschenswerth, um die Einführung der Paare als eine Nothwendigkeit darthun zu können. Beim Vortrage wird die nochmalige Herleitung gedachter Sätze mit Hülfe der Paare, als eine zweckmäßige Übung zu betrachten sein. In Bezug auf Darstellungsweise als neu, dürfte besonders das Kapitel über Festigkeit der Körper erscheinen; eine noch mehrige Vereinfachung scheint mir hier, ohne der nothwendigen wissenschaftlichen Begründung zu schaden, beinah unmöglich.

Den Wünschen eines hochgeehrten Herrn Recensenten der ersten Auflage, im 196. Stück der göttingischen gelehrten Anzeigen vom Jahre 1840, glaube ich überall entsprochen zu haben.

189169

Außer den bereits bei der ersten Auflage an mehreren Stellen benutzten Werken von Brix, Burg, Kaiser, Poncelet und Weisbach, habe ich hier noch besonders anzuführen: *Poinsot's „Eléments de Statique"* und *Sonnet's „Premiers Eléments de Mécanique."*

Endlich halte ich es für Schuldigkeit, zu bemerken, daß mir die mehrmals versprochene rasche Beendigung des ganzen Werkchens, trotz des besten Willens nicht möglich war. Diejenigen meiner Herren Collegen, welche dasselbe bei ihren Vorträgen benutzten, werden es aus eigenen Erfahrungen wissen, wie schwierig das Bücherschreiben ist, wenn man außer seinem Lehrfache noch mehrseitigen anderen amtlichen, gewerblichen und industriellen Verpflichtungen nachzukommen hat. So viel ich vermag, werde ich jedoch Sorge tragen, mindestens die Mechanik vor Ablauf des künftigen Jahres zu vollenden, so wie auch die Maschinenlehre möglichst bald folgen zu lassen.

Hannover, im April 1845.

Rühlmann.

Inhalt.

		Seite
§. 1—5.	Einleitung	1
§. 6—37.	Erstes Kapitel. Vom Gleichgewichte fester Körper überhaupt	3
	Vorläufige Begriffe	3
	Von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte solcher Körper, die mit ihren Richtungen in derselben Ebene liegen und einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben	4
	Von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, deren Richtungen aber in verschiedenen Ebenen liegen	17
	Von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche in einer Ebene liegen und verschiedene Angriffspunkte haben	19
	Von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen und verschiedene Angriffspunkte haben	24
	Von den Kräftepaaren	29
	Vom Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten	43
§. 38—64.	Zweites Kapitel. Vom Schwerpunkte	50
	Schwerpunkte der Linien	53
	„ „ ebener Flächen	55
	„ „ krummer Flächen	65
	„ „ der Körper	65
	Guldins Regel	70

Seite

§. 65—67. **Drittes Kapitel. Von der Stabilität der Körper** 74
§. 68—73. **Viertes Kapitel. Von der Reibung** . . 79
§. 74—99. **Fünftes Kapitel. Von den einfachen Maschinen** 93
Seilmaschine 93
Hebel 107
Rolle 110
Wellrad 117
Schiefe Ebene 120
Schraube 124
Keil 130
§. 100—131. **Sechstes Kapitel. Von der Festigkeit der Körper** 133
Die absolute Festigkeit 135
Die respective Festigkeit 143
Nähere Betrachtung der Biegungen, welche dem Bruche vorangehen 168
Die rückwirkende Festigkeit 173
Die Torsions-Festigkeit 177

Verbesserungen.

Seite 4 Zeile 7 von unten, ist Zusammensetzung, Zerlegung und etc. statt Zusammensetzung zu schreiben, dasselbe gilt von den Ueberschriften bei §. 15, §. 17 und §. 20.
„ 20 „ 13 v. u. ist Coordinaten statt Corrodinalen zu setzen.
„ 80 „ 11 v. o. muß es Nabenflächen statt Nabelflächen heißen.
„ 104 „ 14 v. u. ist so statt se zu setzen.
„ 110 „ 13 v. o. ist Gleichgewicht etc. statt Gheichgewicht zu lesen.
„ 111 „ 1 v. o. ist der Exponent 2 zu streichen.
„ 133 „ 5 v. u. ist entgegensetzen statt entgegengesetzt zu schreiben.
„ 138 „ 14 v. o. ist Ausglühen statt Ausgleichen zu setzen.
„ 163 „ 12 v. u. ist nach dem Buchstaben Q das Gleichheitszeichen einzuschalten.

Einleitung.

§. 1.

Das Undurchdringliche im Raume, d. h. das, was den Raum so erfüllt, daß da, wo es ist, zugleich nichts Anderes sein kann, heißt Materie. Ein bestimmter Theil der Materie, der nach allen Richtungen hin begrenzt ist, wird ein **Körper** und die Menge der Materie, aus welcher ein Körper zusammengesetzt ist, die **Masse** desselben genannt.

§. 2.

Die Stelle des unendlichen Weltraumes, die ein Körper (oder eine andere geometrische Größe, ein Punkt, eine Linie, eine Fläche) einnimmt, nennt man seinen absoluten Ort. Vergleicht man den Ort eines Körpers mit den Oertern anderer Körper, so erhält man seinen relativen Ort.

Verharren im Orte wird Ruhe, stetige Ortsveränderung Bewegung genannt. Wie vorher bei dem Begriffe des Ortes, so kann man auch hier absolute und relative Ruhe oder Bewegung unterscheiden.

§. 3.

Alle Körper haben das Bestreben, in dem einmal angenommenen Zustande der Ruhe, oder der Bewegung zu verharren; eine Eigenschaft, welche man Trägheits- oder Beharrungs-Vermögen nennt. Soll daher der Zustand eines Körpers geändert werden, so muß irgend eine Ursache vorhanden sein, welche dieß bewirkt. Diese Ursache bezeichnet man mit dem Namen »**Kraft.**« Hierbei kümmert man sich jedoch nicht um das Wesen derselben, sondern beurtheilt sie nur nach ihren Wirkungen.

§. 4.

Wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, so kann der Fall eintreten, daß diese Kräfte sich so gegenseitig vernichten oder aufheben, daß der Körper gar keine Bewegung annimmt; diesen besonderen Zustand eines beweglichen Körpers, der in Ruhe bleibt, obwohl er von verschiedenen Kräften getrieben wird, nennt man das Gleichgewicht, oder man sagt, daß diese Kräfte im Gleichgewichte sind. Die Wissenschaft aber, welche betrachtet, in wiefern Kräfte, die auf irgend einen Körper

(oder eine andere geometrische Größe) wirken, entweder Gleichgewicht oder Bewegung zu erzeugen im Stande sind, wird Mechanik*) genannt, und sie zerfällt nach den beiden eben genannten Beziehungen in die Statik**) und in die Dynamik***) oder in die Lehre vom Gleichgewicht und in die Lehre von der Bewegung der Körper.

§. 5.

Nach der Art und dem Grade, wie und wie stark die Theile der Körper zusammenhängen (dem Aggregatszustande) nennt man dieselben fest oder flüssig. Fest heißt ein Körper, wenn seine Theile so zusammenhängen, daß er eine bestimmte Gestalt hat; flüssig dagegen, wenn dieß nicht der Fall ist, sondern sich seine Gestalt nach der des Gefäßes richtet, worin er enthalten ist.

Die flüssigen Körper werden ferner eingetheilt in zusammendrückbare (elastische oder expansible) und in nichtzusammendrückbare (tropfbare); letztere sind entweder gar nicht, oder bloß durch außerordentliche Kräfte und auch da nur äußerst wenig zusammenzudrücken; von ersteren gilt das Gegentheil.

Als Repräsentant der nich zusammendrückbaren Körper wählt man gewöhnlich das Wasser (Ὕδωϱ) und ebenso als den der zusammendrückbaren die atmosphärische Luft (Ἀήϱ).

Nach den angegebenen Aggregats-Zuständen der Körper läßt sich aber die Mechanik eintheilen:

1) in die Mechanik fester Körper;
2) in die Mechanik nicht-zusammendrückbarer Flüssigkeiten, und
3) in die Mechanik zusammendrückbarer Flüssigkeiten.

In Bezug auf §. 4. giebt es demnach sechs Theile der gesammten Mechanik, nämlich:

1) die Statik fester Körper oder Geostatik;
2) die Dynamik fester Körper oder Geodynamik;
3) die Statik nicht-zusammendrückbarer Flüssigkeiten oder die Hydrostatik;
4) die Dynamik nicht-zusammendrückbarer Flüssigkeiten oder die Hydrodynamik;
5) die Statik zusammendrückbarer Flüssigkeiten oder die Aerostatik, und
6) die Dynamik zusammendrückbarer Flüssigkeiten oder die Aerodynamik (Pneumatik).

---

*) von Μηχανή — Maschine.
**) von Στάω — stehen, stellen.
***) von Δύναμις — Kraft.

Erster Abschnitt.

Geostatik.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte der Körper überhaupt.

I. Vorläufige Begriffe.

§. 6.

In der Statik hat man bei der Bestimmung einer Kraft nachbemerkte drei Dinge in Betracht zu ziehen, nämlich:

1) ihren Angriffspunkt, d. h. denjenigen Punkt eines Körpers, auf welchem die unmittelbare Einwirkung der Kraft statt hat;
2) ihre Richtung, d. h. die gerade Linie, nach welcher sie ihre Wirkung äußert; und
3) ihre Größe oder Intensität, welcher Begriff jedoch erst weiter unten, durch die Principien des Gleichgewichtes selbst, näher bestimmt werden wird. *)

§. 7.

Die Basis, worauf die ganze Statik beruht, bilden einige Grundsätze, die wie nachstehend lauten:

1) Wirken auf einen und denselben Punkt eines Körpers zwei gleiche Kräfte nach einander entgegengesetzten Richtungen, so bleibt der Körper in Ruhe; die Kräfte erhalten einander im Gleichgewichte.
2) Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, und sind einige derselben im Gleichgewichte, so ist die gesammte Wirkung aller Kräfte dieselbe, jene sich im Gleichgewichte haltenden Kräfte mögen wirksam bleiben oder ganz fehlen; dasselbe wird auch der Fall sein, wenn man noch so viele im Gleichgewichte befindliche Kräfte hinzusetzt.

---

*) Der Begriff „Zeit“ bleibt in der Statik völlig ausgeschlossen, was zugleich (gegenüber der Dynamik) das Eigenthümliche derselben ausmacht.

3) Die Wirkung einer Kraft bleibt dieselbe, in welchem beliebigen Punkte ihrer Richtungslinie der Angriffspunkt gedacht werden mag, wenn dieser Punkt nur mit dem ersten (wahren) Angriffspunkte entsprechend verbunden ist.

§. 8.

Mit Hülfe des ersten Grundsatzes wird es zunächst leicht, anzugeben, wie man Kräfte messen und den Begriff »Größe einer Kraft« bestimmen kann.

Nimmt man nämlich irgend eine Kraft als Einheit an, so müssen offenbar zwei solche nach derselben Richtung wirkende Kräfte die Kraft $= 2$, drei solche die Kraft $= 3$, und allgemein n solche die Kraft $= n$ vorstellen. Zugleich sieht man hierbei, wie man die Größen der Kräfte durch Zahlen auszudrücken im Stande ist, wobei noch bemerkt werden muß, daß man entgegengesetzte Richtungen durch die Vorzeichen $+$ und $-$ unterscheidet; ferner wie man dieselben durch Linien darstellen kann, die den eben bemerkten Zahlen proportional sind und die man meist auf den Kraftrichtungen aufträgt.

Fig. 1.

Sagt man also, daß eine Kraft $= P$ der Richtung und Größe nach durch eine gerade Linie AB Fig. 1. dargestellt wird, so ist dieß so zu verstehen, daß die Länge AB die Linieneinheit AC eben so oft enthält, als in P die Krafteinheit $= p$ enthalten ist, d. h. daß man hat

$$P : p = AB : AC.$$

Da aber p und AC Einheiten sind, so folgt noch:

$$P : 1 = AB : 1 \text{ oder } P = AB.$$

II. Von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, die mit ihren Richtungen in derselben Ebene liegen und einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben.

§. 9.

Wenn auf einen Punkt eines festen Körpers zwei oder mehrere Kräfte nach gleichen oder verschiedenen Richtungen wirken, so ist immer eine einzige Kraft denkbar, welche dem Körper

dasselbe Bestreben zur Bewegung ertheilt, als die einzelnen Kräfte zusammengenommen. Diese einzige Kraft heißt die Mittelkraft oder die Resultante, und die Kräfte, welche sie zu ersetzen im Stande sind, die Seitenkräfte oder die Componenten.

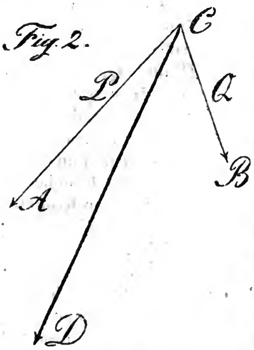
Wird die Mittelkraft in dem ihrer Richtung entgegengesetzten Sinne angebracht, so hält sie den Seitenkräften das Gleichgewicht und wird dann die entgegengesetzte Mittelkraft genannt.

Sucht man zu Seitenkräften die ihnen entsprechende Mittelkraft, so nennt man ein solches Verfahren die Zusammensetzung der Kräfte; sucht man aber zu einer Kraft ihre entsprechenden Seitenkräfte, so nennt man dieß die Zerlegung der Kräfte.

Wirken dann zwei oder mehrere Seitenkräfte nach einerlei Richtung in einer und derselben geraden Linie, so folgt aus §. 7, daß ihre Mittelkraft der Summe aller einzelnen gleich sein muß. Wenn aber zwei ungleiche Kräfte nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirken, so ist leicht einzusehen, daß die Differenz beider die Mittelkraft giebt und deren Richtung sodann die der größern der beiden Kräfte ist.

Zugleich läßt sich aber nun die Folgerung ziehen, daß unter irgend einer Anzahl von Seitenkräften, die gemeinschaftlich auf einen Punkt eines Körpers nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirken, nur dann Gleichgewicht Statt finden kann, wenn die Summe der Kräfte, welche nach der einen Richtung wirken, gleich ist der Summe der Kräfte, die in der entgegengesetzten Richtung thätig sind.

Fig. 2.



Bilden die Richtungen *AC* und *BC* zweier auf einen Punkt *C* Fig. 2 wirkenden Kräfte *P* und *Q* einen Winkel mit einander, so ist zwischen diesen allein ein Gleichgewicht n i c h t möglich, da keine die andere gänzlich aufzuheben vermag. Das vereinte Bestreben beider Kräfte wird vielmehr darin bestehen, eine Wirkung (Druck oder Zug) nach einer solchen Richtung zu veranlassen, welche zugleich die der zugehörigen Mittelkraft ist.. Um diese Wirkung aufzuheben, Gleichgewicht zu erzeugen, wird man in der gedachten Richtung die entgegengesetzte Mittelkraft anzubringen haben.

Was die Mittelkraft sonst betrifft, so muß sie erstens mit den Schenkeln des Winkels in einerlei Ebene liegen, indem kein Grund vorhanden ist, daß dieß nicht der Fall wäre, und zweitens

muß sie von den Schenkeln des Winkels eingeschlossen werden, durch den Scheitelpunkt *C* gehen und etwa eine Richtung wie *CD* annehmen; denn jede der beiden Kräfte strebt den Angriffspunkt *C* aus der Richtungslinie der andern in den Winkel abzulenken, welchen eben die Richtungslinien der Kräfte mit einander bilden.

Sind die beiden Kräfte *P* und *Q* einander gleich, so halbirt die Richtungslinie *CD* den Winkel der Seitenkräfte; denn der Angriffspunkt wird durch jede Kraft gleich stark von der Richtungslinie der andern Kraft abgelenkt.

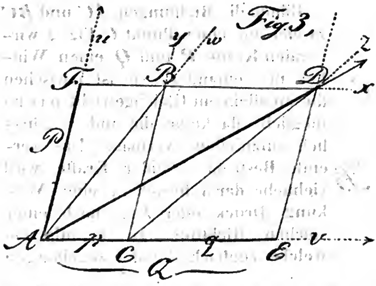
Zugleich läßt sich aber jetzt noch nachweisen, daß die Mittelkraft zweier ungleichen Kräfte mit der größeren Kraft allemal einen kleineren Winkel bilden muß als mit der kleinern.

Anmerk. In dem Nächstfolgenden werden wir uns meistentheils die Körper, worauf Kräfte wirken, als unendlich kleine Dimensionen habend denken und sie deshalb materielle Punkte (Atome) heißen.

§. 10.

Parallelogramm der Kräfte.

Beschäftigen wir uns nun damit, die Mittelkraft zweier unter einem beliebigen Winkel gemeinschaftlich auf einen Punkt wirkender Kräfte *P* und *Q* näher, und zwar zunächst deren Richtung zu bestimmen.



Es sei zu diesem Ende *A* Fig. 3. der Angriffspunkt der Kräfte *P* und *Q*, sowie *Au* und *Av* respective die Richtungen derselben, dabei vorausgesetzt, daß $Q > P$ ist. Man nehme nun an, *Q* bestehe aus zwei anderen Kräften *p* u. *q*, so daß $Q = p + q$ und betrachte zunächst die Wirkung der beiden Kräfte *P* und *p*. Nach vorigem §. entspricht diesen Kräften eine Mittelkraft, deren Richtung die willkürlich gezogene Linie *Aw* vorstellen mag; in letzterer kann man nach Grundsatz 3, §. 7. den Angriffspunkt *A* an einen beliebigen Punkt *B* versetzen, wenn man sich nur *B* in irgend einer festen Verbindung mit *A* denkt. Weil aber diese Resultirende der Wirkungen *P* und *p* gleich kommt, so kann man erstere wieder in diese Seitenkräfte

zerlegen. Zieht man deshalb von B aus $By \parallel Au$ und $Bx \parallel Av$, so muß die Wirkung von P und p in den neuen Richtungen By und Bx auf B noch ganz dieselbe sein, als nach den ursprünglichen Richtungen auf A. Die nunmehrige Richtung By der Kraft P verlängere man jetzt bis zum Durchschnittspunkte C mit der Richtung Av und lasse in diesem Punkte die Kraft P, und den zweiten Theil von Q d. i. q respective nach den Richtungen Cy und Cv wirken, so wird man wieder eine gerade Linie Cz als die Richtung der Mittelkraft der letztgenannten einzelnen Kräfte annehmen können. Der Angriffspunkt dieser Mittelkraft Cz ist aber willkürlich in ihrer Richtung zu versetzen, weshalb wir den Punkt D zum Angriffspunkte wählen können, wo die Richtung Bx die Cz schneidet. Bx war aber die Richtung der Kraft p, und man kann demnach auch diese Kraft als in D mit angreifend sich vorstellen. Hieraus folgt aber, daß D als der gemeinschaftliche Angriffspunkt der drei Kräfte P, p und q oder der P und Q anzusehen ist, so daß D ein Punkt ist, der in der Richtungslinie der Mittelkraft der Kräfte P und Q liegt. Die Richtungslinie geht also durch die Punkte A und D, weshalb die Verbindungslinie AD beider diese Richtung selbst sein muß.

Wird demnach endlich $DE \parallel Au$ gezogen und Bx soweit verlängert, bis Au in F geschnitten wird, so giebt die Diagonale AD des Parallelogrammes $ADEF$ die Richtungslinie der Mittelkraft der zwei Seitenkräfte P und Q an.

Noch aber ist zu zeigen, daß sich die Seitenlinien AF und AE dieses Parallelogrammes respective wie die Kräfte P und Q zu einander verhalten, und zwar kann dieß, wie folgt, geschehen.

Es sei zunächst $p = q = P$ also (1.) $Q = 2P$.
Ist dieß der Fall, so muß auch sein $AC = CE = AF$ und daher:

(2.) $AE = 2\,AF$.

Verbindet man (1.) mit (2.), so folgt:

$$2P : Q = 2\,AF : AE \text{ oder}$$
$$P : Q = AF : AE.$$

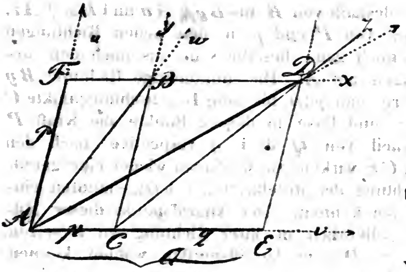
Setzt man ferner $p = 2q$, $q = P$, also

(3.) $Q = 3P$, so muß, wenn das Vorherige richtig ist, sein: $AC = 2\,AF$, es ist aber auch $CE = AF$ und demnach

$$AC + CE = 2\,AF + AF \text{ oder}$$

(4.) $AE = 3\,AF$ und wenn wieder (3.) mit (4.) verbunden wird:

$$3P : Q = 3\,AF : AE, \text{ oder}$$
$$P : Q = AF : AE.$$



Auf gleiche Weise fortgefahren, läßt sich endlich nachweisen, daß für

$Q = nP$ auch

$AE = nAF$ sein muß, und daß sodann ebenfalls die Proportion stattfindet:

$$P : Q = AF : AE.$$

Hiermit ist also erwiesen, daß sich die Seitenkräfte wie die Parallelogramm-Seiten AF und AE verhalten, wenn die eine Kraft Q ein beliebiges, hier n faches der andern Kraft P ist.

Dehnen wir nunmehr den Beweis noch dahin aus, daß beide Kräfte verschiedene Vielfache irgend einer Krafteinheit $= \alpha$ sind.

Zu diesem Ende sei zuvörderst $p = q = \alpha$, also $Q = 2\alpha$ und $P = n\alpha$, daher

$$(5.)\ \frac{Q}{P} = \frac{2}{n}$$

Nach dem vorher Bewiesenen muß aber zufolge der jetzigen Annahme sein $AF = n.AC$, oder weil wegen $p = q$ auch $AC = CE$, $AF = n.CE$ d. i.

$$2\,AF = n\,(AC + CE) = n\,AE \text{ oder}$$

$$(6.)\ \frac{AE}{AF} = \frac{2}{n}$$ und wenn man (5.) mit (6.) verbindet

$$\frac{Q}{P} = \frac{AE}{AF} \text{ d. i.}$$

$$P : Q = AF : AE.$$

Setzt man weiter $p = 2\alpha$, $q = 1\alpha$ d. i. $Q = 3\alpha$ und $P = n\alpha$ oder

$$(7.)\ \frac{Q}{P} = \frac{3}{n},$$

so folgt, wenn der letztere Satz richtig ist, auch $\frac{AC}{AF} = \frac{2}{n}$

und da zugleich $\frac{CE}{AF} = \frac{1}{n}$ auch

$$\frac{AC + CE}{AF} = \frac{3}{n} \text{ oder } (8.)\ \frac{AE}{AF} = \frac{3}{n}$$

d. g. wenn (7.) mit (8.) verbunden wird:

$$\frac{Q}{P} = \frac{AE}{AF} \text{ oder}$$

$$P : Q = AF : AE \text{ u. s. f.}$$

wird man endlich erhalten:

für $Q = m\alpha$ und $P = n\alpha$ die Werthe:

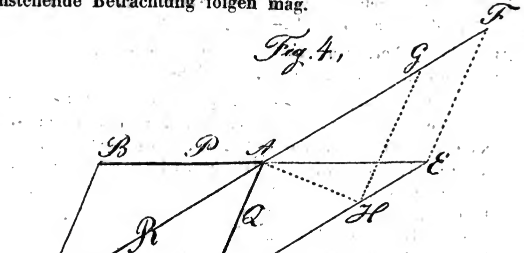
$$\frac{Q}{P} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{AE}{AF} = \frac{m}{n} \text{ oder}$$

$$P : Q = AF : AE.$$

Im vorstehenden Beweise wurde außerdem stillschweigend vorausgesetzt, daß $m : n$ ein commensurables, d. i. ein solches Verhältniß sei, wobei der Exponent entweder eine ganze oder gebrochene, nur keine irrationale Zahl ist. Allein der genannte Beweis gilt auch für ein incommensurables Verhältniß, indem sich zwei Zahlen wie m und n nachweisen lassen, deren Quotient $\frac{m}{n}$ den incommensurablen Verhältniß so nahe gebracht werden kann, als nur immer möglich ist*).

§. 11.

Im vorigen § haben wir unberücksichtigt gelassen, ob durch die Diagonale des erwähnten Parallelogrammes auch die Größe der Mittelkraft bestimmt wird oder nicht, weshalb denn noch nachstehende Betrachtung folgen mag.



Es sei wieder in Fig. 4. der Punkt A der Angriffspunkt der beiden Kräfte P und Q, sowie beziehlich AB und AC die diesen Kräften proportionalen Linien. Wird demnach das Parallelogramm $ABCD$ wie in dem vorigen § construirt, so bestimmt

*) Ist das incommensurable Verhältniß z. B. $\sqrt{2} : 1$, so ist dafür $1{,}4142135 : 1$ als vollkommen genügend in Rechnung zu bringen u. s. w.

AD die Richtung der Mittelkraft der Kräfte ***P*** und ***Q***. Bringt man ferner in ***A***, in der Richtung ***AD*** die entgegengesetzte Mittelkraft von ***R*** an, so muß zwischen den drei Kräften ***P***, ***Q*** und ***R*** nach den beziehlichen Richtungen ***AB***, ***AC*** und ***AF*** hin, Gleichgewicht stattfinden, und demnach kann jede derselben als entgegengesetzte Mittelkraft der beiden andern angesehen werden. Nimmt man daher ***P*** als solche Mittelkraft an, und läßt sie nach der ***AB*** entgegengesetzten Richtung ***AE*** wirken, so ist sie die Mittelkraft der nach den Richtungen ***AF*** und ***AC*** wirkenden Kräfte ***R*** und ***Q***. Trägt man ferner ***AB*** von ***A*** nach ***E*** und zieht die Verbindungslinie ***EC***, so muß diese sowohl mit ***AD*** als mit ***AF*** parallel sein. Zieht man dann weiter ***EF*** || ***AC***, so entsteht das Parallelogramm ***CAEF***, in welchem ***AE*** die Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte vorstellt, deren Intensitäten sich wie die Seiten ***AF*** und ***AC*** zu einander verhalten. Es stellt aber ***AC*** geometrisch die Größe der Kraft ***Q*** vor, ein Grund, daß auch ***AF*** ebenso die Größe ***R*** repräsentiren muß. Denn angenommen, es wäre dies nicht der Fall, so müßte irgend ein anderer Theil von ***AF***, z. B. ***AG***, die Größe von ***R*** darstellen, und wenn man dann das Parallelogramm ***CAGH*** bildete, so würde ***AH*** die Richtung der Mittelkraft von ***Q*** und ***R*** sein, was aber nicht möglich ist, da dieselbe nach dem Frühern in die Richtung von ***AB*** zu liegen kommen muß.

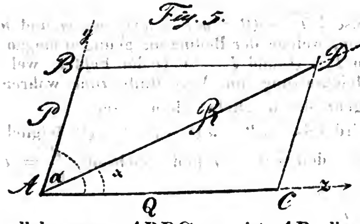
Endlich ist nach geometrischen Sätzen ***AF*** = ***CE***, sowie ***CE*** = ***AD***, daher auch ***AF*** = ***AD***.

Aus Allem aber, was in diesem und dem vorhergehenden §§ nachgewiesen, folgt jetzt der allgemeine Satz:

> Die Richtung und Größe der Mittelkraft zweier Kräfte, die unter irgend einem Winkel auf einen Punkt gemeinschaftlich wirken, wird durch die Diagonale des Parallelogrammes bestimmt, welches mit den geraden Linien construirt wird, die sich genau wie die beiden Kräfte zu einander verhalten und deren Richtungen angeben.

Das erwähnte Parallelogramm wird deshalb auch das Parallelogramm der Kräfte genannt.

§. 12.



Es mögen Ay und Az die Richtungen zweier beliebiger unter dem Winkel $yAz = \alpha$ auf den Punkt A wirkenden Kräfte P und Q sein, wobei sich verhält $P : Q = AB : AC$. Construirt man nach dem Vorhergehenden das Parallelogramm $ABDC$, so ist AD die Größe und Richtung der Mittelkraft R.

Die Beantwortung aller hier möglichen Fragen wird überhaupt auf die Bestimmung der Stücke eines der Dreiecke ABD oder ACD zurückzuführen sein. So erhält man für die Größe der Mittelkraft R, nach einem bekannten trigonometrischen Satze,

$$\text{I.} \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}.$$

Für die Richtung von R, wenn $\angle DAC = x$ gesetzt wird,

$$\text{II.} \quad \sin x = \frac{P}{R} \sin \alpha.$$

Ist der Winkel α ein rechter, so wird

$$\text{III.} \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{u : IV.} \quad \sin x = \frac{P}{R}.$$

Statt III. kann man überdies, sobald es sich um Annäherung handelt und bekannt ist, daß $P > Q$, bis auf $\frac{1}{25}$ genau setzen:

$$\text{V.} \quad R = 0{,}96.\ P + 0{,}4\ Q. \text{*)}$$

Endlich ist für $P = Q$

$$\text{VI.} \quad R = 2P \cos \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Bringt man ferner, wie in Fig. 4, an A eine der R gleiche und entgegengesetzte Kraft (AF) an, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung:

$$P : Q : R = \sin CAF : \sin BAF : \sin BAC.$$

Beispiel 1. Die Intensitäten von P und Q sind respective durch die Zahlen (Krafteinheiten) 40 und 80 ausgedrückt, der Winkel α beträgt 102° 18′, wie gross ist R und der Winkel x?
Aufl.: $R = 81{,}465$. $x = 28^\circ\ 40'$

Beispiel 2. Drei Kräfte, deren Grösse durch die Zahlen 32, 40 und 45 angegeben sind, sollen so an einem Punkte angebracht werden, dass sie sich das Gleichgewicht halten; wie gross sind die Neigungswinkel ihrer Richtungen zu nehmen?
Aufl.: Respective 103° 31′ 55″
136° 15′ 40″
120° 12′ 25″.

---

*) Man sehe hierüber die folgende Anmerkung.

Anmerkung: Zur Nachweisung des Satzes V. diene Folgendes.

Es sei annäherungsweise $\sqrt{P^2+Q^2}=mP+nQ$, wo m und n unbestimmte Zahlen bedeuten, welche der Bedingung genügen mögen, daß innerhalb der Grenzen $P=Q$ und $P=\infty Q$ der Fehler, welchen man durch die Gleichsetzung im Verhältniß zum wahren Werthe von $\sqrt{P^2+Q^2}$ begeht, der möglichst kleinste sei.

Der absolute Fehler wird sein: $mP+nQ-\sqrt{P^2+Q^2}$, folglich der verhältnißmäßige Fehler, den wir $=f$ und gleichzeitig $\frac{P}{Q}=x$ setzen wollen:

$$(1)\ f=\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+1}}-1.$$

Es wird nun die Aufgabe sein, diesen Werth von f für alle zwischen den bemerkten Grenzen ($x=1$, $x=\infty$) enthaltenen Werthe von P und Q oder x, zum möglichst kleinsten und zwar dadurch zu machen, daß man hierzu die Werthe von m und n schicklich wählt.

Man suche deshalb zuerst diejenigen Ausdrücke von (1), welche den bezeichneten Grenzen entsprechen, wodurch man erhält

$$\text{für } x=\infty : (2)\ f=m-1, \text{ so wie}$$

$$\text{für } x=1 : (3)\ f=\frac{m+n}{\sqrt{2}}-1.$$

Am zweckmäßigsten wird man die Fehler vertheilen, wenn man letztere zwei Werthe (2 und 3) einander gleich, d. i.

$$m-1=\frac{m+n}{\sqrt{2}}-1 \text{ setzt,}$$

wodurch man zugleich erhält

$$(4)\ n=0{,}414.m \text{ oder } m=2{,}415.n.$$

Zur vollständigen Bestimmung von m und n ist es jedoch nothwendig eine zweite Gleichung abzuleiten, wozu wir nachfolgenden Weg einschlagen.

Der Ausdruck (1) wird am Größten für $x=\frac{m}{n}$, wie man sich durch Einsetzen von respective $x=\frac{m}{n}\pm\delta$ überzeugen kann.

Substituirt man diesen Werth in (1), so findet man für den größten Fehler

$$(5)\ f=-1+\sqrt{m^2+n^2}.$$

Bemerkt man ferner, daß sobald (1) mit entgegengesetztem Zeichen genommen wird, dieser Ausdruck nothwendig für $x=\frac{m}{n}$ seinen kleinsten Werth annimmt, so erhellt leicht, daß eine fernere vortheilhafte Vertheilung erfolgen wird, sobald man den größten Fehler (5) negativ genommen, jeden der beiden (positiven) Fehler (2) und (3) gleich setzt. Hiernach wird also:

$$m-1=\frac{m+n}{\sqrt{2}}-1=+1-\sqrt{m^2+n^2}, \text{ woraus}$$

$n^2 + 9{,}66\,n = 4$; $n = 0{,}398$ und mit Hülfe von (4) $m = 0{,}961$ folgt, wofür natürlich die oben angegebenen Werthe geſetzt werden können.

Setzt man die gefundenen Größen in die Gleichung (1), ſo ergiebt ſich überdies

$$f = \pm(-1 + 1{,}04) = \pm 0{,}04 = \pm \tfrac{1}{25}\,^{*}).$$

§. 13.

Zur ferneren Erläuterung der Sätze vom Parallelogramm der Kräfte diene nachſtehende Aufgabe.

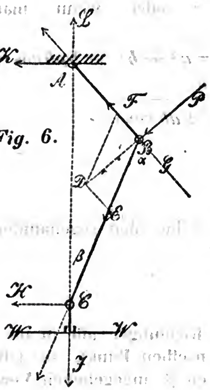


Fig. 6.

Es ſtellen AB und BC Fig. 6. zwei bei B durch einen Bolzen (Gelenk) vereinigte, völlig unbiegſame Stäbe vor, deren Enden A und C um Zapfen drehbar ſein mögen; dabei ſei die Pfanne von A völlig feſt, die von C aber verſchiebbar, ferner ſtütze ſich C durch ein Verticalſtück CJ gegen einen (verrückbaren) Widerſtand WW. Es wirke nun, in der Ebene der Stangen, bei B normal gegen AB eine Kraft P und man ſoll die hierdurch bei C und A veranlaßten Normalpreſſungen angeben?

Auflöſung. Man ſtelle P durch BD dar und finde hierzu, durch Conſtruction des Parallelogrammes EF, die mit den Richtungen der Stäbe zuſammenfallenden Seitenkräfte BE und BF. Für dieſe erhält man zugleich, wenn $\angle EBG = \alpha$ geſetzt wird, wobei BG die Verlängerung von AB iſt,

$$(1)\; BE = \frac{P}{\sin\alpha},\quad (2)\; BF = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Verſetzt man zunächſt den Angriffspunkt der Seitenkraft BE nach C, und zerlegt ferner horizontal und vertical, ſo folgt, wenn man $\angle ACB$ mit β bezeichnet

$$(3)\; CH = P\frac{\sin\beta}{\sin\alpha};\quad (4)\; CJ = P\frac{\cos\beta}{\sin\alpha};$$

und auf gleiche Weiſe mit BF verfahren

*) Ausführlicheres über dieſen zuerſt von Poncelet entwickelten Satz findet man in deſſen „Mécanique appliquée aux Machines", daraus in Crelle's Journal f. d. Mathematik, Bd. 13, Seite 277. Mit Hülfe der Methode der kleinſten Quadrate beſtimmte neuerdings Weisbach die Coefficienten m und n, worüber in den Polytechn. Mittheilungen von Karmarſch, Heft 1, S. 81, nachzuleſen iſt.

$$(5)\ AK = P\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha};\quad (6)\ AL = P\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch auf mannigfache Weise umgestalten. Bezeichnet man AB, BC und AC respect. mit a, b und c, so läßt sich z. B. in (4) β entfernen, indem

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}\sin\alpha^2}.$$

Nach gehöriger Reduction folgt dann

$$CJ = P\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha^2} - \frac{a^2}{c^2}};$$ oder wenn man gleichzeitig c wegbringen will, wegen: $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\alpha$,

$$(7)\ CJ = \frac{P}{\sin\alpha}\frac{(b + a\cos\alpha)}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\alpha)}}.$$

Für $a = b$ wird aus (7)

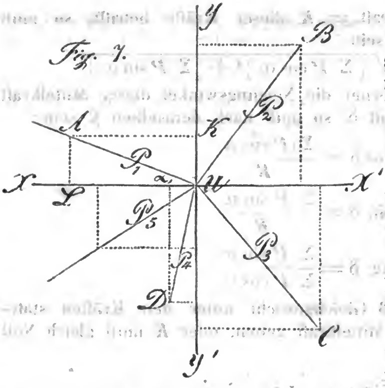
$$CJ = \frac{P}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$ u. s. f.

Vorstehende Sätze finden Anwendung bei den sogenannten Kniehebelpressen.

§. 14.

Wirken mehr als zwei Kräfte, deren Richtungen alle in derselben Ebene liegen, auf einen und denselben Punkt, so läßt sich durch Wiederholung des in dem vorigen § angegebenen Verfahrens die Richtung und Größe der entsprechenden Mittelkraft bestimmen.

Man sucht nämlich zuerst die Mittelkraft zu zweien der gegebenen Kräfte, verbindet diese gefundene Kraft mit einer dritten und erhält eine zweite Mittelkraft, welche man ebenso mit einer vierten Kraft verbindet, und fährt überhaupt so fort, bis keine der einzelnen Kräfte mehr vorhanden ist.



Auf dem Wege der Rechnung läßt sich eine solche Aufgabe wie nachstehend auflösen.

Es mögen P_1, P_2, P_3 .... Pn die Intensitäten der auf den Punkt U Fig. 7. gemeinschaftlich wirkenden Kräfte und UA, UB, UC, UD u. s. w. deren Richtungen sein. Durch den Angriffspunkt U ziehe man sodann zwei sich rechtwinkelig schneidende mit den Kraftrichtungen in einerlei Ebene liegende Axen XX', YY' und bezeichne die Winkel XUA, XUB u. s. f., welche die Kraftrichtungen, mit der Axe XX' bilden, beziehlich durch α_1, α_2, α_3, ... α_n, dabei von UX an rechts herum von 0^0 bis 360^0 fortgezählt gedacht.

Weiter zerlege man jede der einzelnen Kräfte nach 2 Richtungen und zwar so, daß die eine Seitenkraft mit der Axe XX', die andere mit der YY' zusammenfällt. Z. B. P_1 in $AL = P_1 \sin\alpha$ und in $LU = P_1 \cos\alpha$.

Auf solche Weise wird man für die mit der Axe XX' zusammenfallenden oder in dieser Richtung wirkenden Kräfte erhalten:

$$P_1 \cos\alpha_1,\ P_2 \cos\alpha_2,\ P_3 \cos\alpha_3,\ \ldots.\ P_n \cos\alpha_n.$$

Ebenso für die Kräfte, welche mit YY' zusammenfallen:

$$P_1 \sin\alpha_1,\ P_2 \sin\alpha_2,\ P_3 \sin\alpha_3,\ \ldots.\ P_n \sin\alpha_n.$$

Dabei ist es zugleich unnöthig, die Kräfte, welche nach entgegengesetzten Richtungen, d. i. nach UX' und UY' wirken, negativ in Rechnung zu bringen, da dieß von selbst durch die relativen Vorzeichen der Sinuse und Cosinuse bestimmt wird, je nachdem diese zu spitzen, stumpfen oder überstumpfen Winkeln gehören.

Die Summe der nach der Axe XX' wirkenden Kräfte, die wir mit $\Sigma\,(P \cos\alpha)$ bezeichnen wollen, ist daher:

$$\Sigma\,(P\cos\alpha) = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots\ P_n \cos\alpha_n.$$

Die Summe der nach der Axe YY' wirkenden Kräfte aber auf ähnliche Weise:

$$\Sigma\,(P\sin\alpha) = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \ldots\ P_n \sin\alpha_n.$$

Was jetzt die Mittelkraft $= R$ dieser Kräfte betrifft, so muß diese nach III. §. 12. sein.

$$\text{I.}\quad R = \sqrt{[\Sigma(P\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(P\sin\alpha)]^2}$$

Bezeichnet man ferner die Neigungswinkel dieser Mittelkraft gegen die Axe XX' mit δ, so muß nach demselben § sein:

$$\text{II.,}\quad \cos\delta = \frac{\Sigma(P\cos\alpha)}{R}$$

$$\text{III.,}\quad \sin\delta = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{R}$$

$$\text{IV.,}\quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\Sigma(P\sin\alpha)}{\Sigma(P\cos\alpha)}$$

Für den Fall, daß Gleichgewicht unter den Kräften stattfindet, kann es keine Mittelkraft geben, oder R muß gleich Null sein, d. i.

$$0 = \{\Sigma(P\cos\alpha)\}^2 + \{\Sigma(P\sin\alpha)\}^2.$$

Da aber die Summe der Quadrate irgend zweier möglicher Größen nur unter der Bedingung Null werden kann, daß jede derselben, für sich allein genommen, gleich Null ist, so ergeben sich noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0 \text{ und}$$
$$\Sigma(P\sin\alpha) = 0.$$

Beispiel:

Für einen bestimmten Fall mögen die Intensitäten der Kräfte durch Zahlen, wie folgt, angegeben sein:

$P_1 = 75,4$; $P_2 = 26,3$; $P_3 = 85,5$; $P_4 = 54,2$; $P_5 = 12,7$; $P_6 = 86,5$.

Ferner die beziehlichen Winkel

$\alpha_1 = 53^\circ\,24'$; $\alpha_2 = 103^\circ\,12'$; $\alpha_3 = 165^\circ\,27'$; $\alpha_4 = 201^\circ\,40'$; $\alpha_5 = 253^\circ\,20'$; $\alpha_6 = 304^\circ\,15'$.

Es ist also:

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 75,4\cos 53^\circ\,24' + 26,3\cos 103^\circ\,12' + 85,5\cos 165^\circ\,27' + 54,2\cos 201^\circ\,40' + 12,7\cos 253^\circ\,20' + 86,5\cos 304^\circ\,15';$$

$$\Sigma(P\sin\alpha) = 75,4\sin 53^\circ\,24' + 26,3\sin 103^\circ\,12' + 85,5\sin 165^\circ\,27' + 54,2\sin 201^\circ\,40' + 12,7\sin 253^\circ\,20' + 86,5\sin 304^\circ\,15'.$$

Hieraus aber unter sorgfältiger Berücksichtigung der Lage der trig. Linien und sodann am vortheilhaftesten mittels Tafeln, welche die letzteren für den Halbmesser $= 1$ berechnet enthalten *).

$$\Sigma(P\cos\alpha) = -49,2383$$
$$\Sigma(P\sin\alpha) = +\ 3,9387 \text{ und demnach}$$
$$R = \sqrt{(-49,2383)^2 + (3,9387)^2} = 49,39.$$

Sodann ist auch

$$\sin\delta = \frac{3,9387}{49,39} = 0,07974;$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{3,9387}{49,2383} = -0,079992.$$

*) Unter anderen auch die logarithmischen Tafeln des Verfassers. Dritte Auflage. Dresden, bei Arnold, 1845.

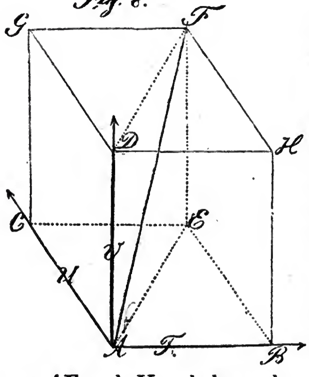
Da der Sinus positiv, die Tangente aber negativ ist, so folgt, daß die Mittelkraft im zweiten Quadranten liegt und daß nach den Tafeln

$$\delta = 175^\circ\, 25'\, 35''\ \text{ist.}$$

Von der Zerlegung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben, deren Richtungslinien aber in verschiedenen Ebenen liegen.

§. 15.

Fig. 8.



Es mögen zunächst T, U und V Fig. 8. drei Kräfte sein, welche, rechtwinkelig gegen einander gerichtet, auf den Punkt A gemeinschaftlich wirken.

Denkt man sich dann durch A, B und C eine Ebene gelegt, so ist die Diagonale AE des Parallelogramms $ABCE$ die Mittelkraft von T und U, und zwar ist

$$(1.)\quad AE = \sqrt{T^2 + U^2}$$

Legt man ferner durch ADE eine Ebene, so ist ebenso die Diagonale AF des Parallelogramms $ADEF$ die Mittelkraft von AE und V und demnach

$$(2.)\quad AF = \sqrt{\overline{AE}^2 + V^2}$$ und wenn man (1.) mit (2.) verbindet und $AF = R$ setzt:

$$\text{I.,}\quad R = \sqrt{T^2 + U^2 + V^2}.$$

Durch ein entsprechendes Legen von noch anderen Ebenen in Fig. 8. sieht man aber, daß in diesem Falle die Richtung und Größe der Mittelkraft durch die Diagonale des Parallelepipedums bestimmt wird, dessen Kanten AF, AU und AV, d. i. die Linien sind, welche die Seitenkräfte repräsentiren.

Bildet außerdem die Mittelkraft R mit AB, AC und AD respective die Winkel α, β und γ, so ist

$$\text{II.,}\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{T}{R}; \\ \cos\beta = \dfrac{U}{R}; \\ \cos\gamma = \dfrac{V}{R}. \end{cases}$$

Und wenn man diese drei Werthe quadrirt und sodann addirt, so folgt:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{T^2 + U^2 + V^2}{R^2},$$

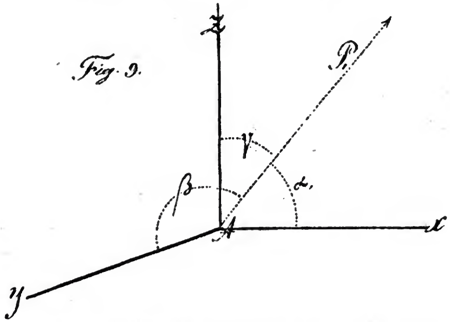
d. i. wegen I.

$$\text{III.} \quad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

§. 16.

Ist endlich eine willkürliche Anzahl von Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n vorhanden, die, in verschiedenen Ebenen liegend, gemeinschaftlich auf einen Punkt A wirken, so ziehe man durch A Fig. 9. drei auf einander rechtwinkelig stehende Ebenen AXY, AXZ und AYZ und bezeichne die Winkel, welche die ge-

Fig. 9.



nannten Kräfte mit den Axen AX, AY und AZ bilden, beziehlich mit $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, ... $\alpha_n\ \beta_n\ \gamma_n$ *).

Ferner zerlege man jede der einzelnen Kräfte nach den drei Axenrichtungen, z. B. P_1 in $P_1 \cos\alpha_1$, $P_1 \cos\beta_1$, $P_1 \cos\gamma_1$, und addire die nach einerlei Richtung erhaltenen Seitenkräfte.

Auf solche Weise erhält man, ähnlich dem §. 14, für die Richtung

nach der Axe $AX: \Sigma(P\cos\alpha) = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 \ldots\ldots P_n \cos\alpha_n.$

» » » $AY: \Sigma(P\cos\beta) = P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + P_3 \cos\beta_3 \ldots\ldots P_n \cos\beta_n.$

» » » $AZ: \Sigma(P\cos\gamma) = P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + P_3 \cos\gamma_3 \ldots\ldots P_n \cos\gamma_n.$

*) Um Undeutlichkeit zu vermeiden, ist in Fig. 9. nur eine dieser Kräfte angegeben.

Hierbei ist natürlich wieder vorausgesetzt, daß jedes Glied dieser Ausdrücke mit dem ihm zukommenden relativen Zeichen zu nehmen ist. Unmittelbar aus §. 15. ergiebt sich aber dann die entsprechende Mittelkraft $= R$ zu

$$R = \sqrt{\{\Sigma(P\cos\alpha)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\beta)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\gamma)\}^2}$$

Die Winkel, welche diese Mittelkraft mit den drei Axen AX, AY und AZ bildet, und die beziehlich mit a, b, c, bezeichnet sein mögen, ergeben sich eben so nach II. des § zu:

$$\cos a = \frac{\Sigma(P\cos\alpha)}{R};$$

$$\cos b = \frac{\Sigma(P\cos\beta)}{R};$$

$$\cos c = \frac{\Sigma(P\cos\gamma)}{R}.$$

Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n unter einander im Gleichgewichte, so muß wieder $R = 0$ sein, oder

$$\{\Sigma(P\cos\alpha)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\beta)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\gamma)\}^2 = 0$$

Letztere Gleichung kann aber eben so wie §. 12. nur dann stattfinden, wenn

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma(P\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma(P\cos\gamma) = 0 \quad \text{ist.}$$

Mit Hülfe der drei letzten Gleichungen lassen sich stets drei Größen berechnen, nämlich drei Kräfte, zwei Kräfte und ein Winkel u. s. f., wenn man dabei nur berücksichtigt, daß nach §. 15. zwischen den zu einerlei Kraft gehörigen Winkeln die Bedingungsgleichungen stattfinden.

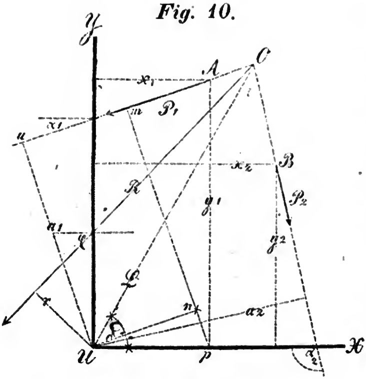
$$1 = \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2$$
$$1 = \cos\alpha_2{}^2 + \cos\beta_2{}^2 + \cos\gamma_2{}^2 \quad \text{u. s. f.}$$

Von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche in einer Ebene liegen und verschiedene Angriffspunkte haben, oder auf ein System mit einander unveränderlich verbundener Punkte wirken.

§. 17.

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, wo nur zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, auf zwei verschiedene, aber unveränderlich verbundene materielle Punkte (einen und demselben festen Körper angehörig) A und B Fig. 10. wirken.

Fig. 10.



In der Ebene der Kräfte ziehen wir zwei rechtwinklige Coordinatenaxen UX und UY und bezeichnen die Winkel, welche P_1 und P_2 mit UX bilden respective mit α_1 und α_2 diese dabei in derselben Richtung von 0° bis 360 fortgezählt.

Werden die Richtungen der Kräfte gehörig verlängert, so schneiden sich selbige in irgend einem Punkte O und durch welchen die Richtung der zugehörigen Mittelkraft gehen muß, sobald man die Angriffspunkte von P_1 und P_2 nach O versetzt denkt.

Nach §. 12. ließe sich jetzt die Größe, Richtung und Lage der Resultante leicht bestimmen, indeß ziehen wir dafür eine der §. 14. ähnliche Darstellung vor.

Bezeichnet nämlich R die Größe der Mittelkraft und bildet deren Richtung mit UX den Winkel φ, so erhält man:

$$(1)\quad R\cos\varphi = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 = \Sigma\,(P\cos\alpha),$$
$$(2)\quad R\sin\varphi = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 = \Sigma\,(P\sin\alpha).$$

Diese Gleichungen bestimmen Größe und Richtung der Mittelkraft. Um auch die Lage derselben analytisch auszudrücken, verbinden wir den Ursprung der Corrodinalen U mit O, bezeichnen die Länge von UO mit L und den Winkel, welchen diese Gerade mit UX bildet, mit δ, fällen ferner von U auf die Richtungen von P_1, P_2 und R Normalen und setzen deren respectiven Längen a_1, a_2 und r. Für letztere erhält man sodann zunächst:

$$(m)\quad \begin{cases} a_1 = L\sin(\delta - \alpha_1)\;^{*}), \\ a_2 = L\sin(\delta - \alpha_2), \\ r\; = L\sin(\delta - \varphi). \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner (1) mit $\sin\delta$ und (2) mit $\cos\delta$ und zieht sodann (2) von (1) ab, so folgt nach gehöriger Zusammenziehung

$$R\sin(\delta - \varphi) = P_1\sin(\delta - \alpha_1) + P_2\sin(\delta - \alpha_2).$$

---

*) Daß hierbei die absolute Größe von α_1 und α_2 unbeachtet bleiben kann, versteht sich nach dem Frühern von selbst.

Substituirt man hier die Sinuswerthe aus (m) und multiplicirt mit L, so erhält man endlich

$$(3)\quad Rr = P_1\, a_1 + P_2\, a_2,$$

woraus r, d. h. die normale Entfernung der Mittelkraftsrichtung vom Ursprunge der Coordinaten gefunden werden kann.

Mit Ausnahme eines einzigen Falles, den wir weiter unten besonders betrachten wollen, können daher zwei in derselben Ebene wirkende Kräfte immer durch eine einzige Mittelkraft ersetzt werden.

Um die Bedingung des Gleichgewichtes auszudrücken, müßte $R =$ Null gesetzt werden etc.

Die einzelnen Glieder der Gleichung (3), im Allgemeinen die Produkte der Kräfte in die aus dem Ursprunge U gefällten Normalen, nennt man die statischen Momente der Kräfte in Bezug auf den gedachten Ursprung, so wie die gedachten Normalen die Hebelarme der respectiven Kräfte.

Diese Produkte lassen sich noch in anderer Form ausdrücken, welche den Vortheil bietet, daß man die relativen Zeichen der Normalen a_1, a_2 und r (je nach der Lage der Kräfte) leicht zu erkennen im Stande ist.

Man setze hierzu die Coordinaten von P_1, P_2 und R respective $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ und $x\, y$, ziehe zunächst hinsichtlich a_1 die Normalen pm auf die Richtung von P_1 und Un auf pm, so ist

$$mp = y_1 \cos \alpha_1\,;\; np = x_1 \sin \alpha_1, \text{ daher}$$
$$Un = a_1 = y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \sin \alpha_1 .$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$a_2 = y_2 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2 \text{ und } p = y \cos \varphi - x \sin \varphi.$$

Statt (3) ist daher zu setzen:

$$(4)\quad R\,(y \cos \varphi - x \sin \varphi) = P_1\,(y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \sin \alpha_1) + P_2\,(y_2 \cos \alpha_2 - x_2 \sin \alpha_2).$$

§. 18.

Mit Hülfe des vorigen § wird es jetzt leicht, den allgemeinen Fall zu behandeln, wenn beliebig viel Kräfte, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, auf ein System unabänderlich verbundener Punkte wirken.

Denn sind P_1, P_2, P_3 .... P_n die Intensitäten der einzelnen Kräfte, α_1, α_2, α_3 .... α_n respective deren Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe und eben so a_1, a_2, a_3 ... a_n deren Hebelarme, so kann man erst wie vorher zu P_1 und P_2 die zugehörige Mittelkraft $= R_1$, den Neigungswinkel $= \varphi_1$ und den Hebelarm r_1 derselben finden; hierauf die dritte Kraft P_3 mit

R_1 auf gleiche Weise behandeln, d. h. zu diesen ebenfalls die Mittelkraft R_2, φ_2 und r_2 bestimmen, und überhaupt so fortfahren, bis man sämmtliche Kräfte auf zwei, nämlich R_{n-1} und P_n reducirt hat. Ist dann R die Mittelkraft der letzteren beiden, φ deren Neigungswinkel und r ihr Hebelarm, so wird man nach gehöriger Substitution finden

$$R \cos \varphi = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \ldots P_n \cos \alpha_n ;$$
$$R \sin \varphi = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 \ldots P_n \sin \alpha_n ;$$
$$Rr = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 \ldots P_n a_n.$$

wofür man wieder schreiben kann

$$(1)\quad R \cos \varphi = \Sigma (P \cos \alpha)$$
$$(2)\quad R \sin \varphi = \Sigma (P \sin \alpha)$$
$$(3)\quad Rr = \Sigma (Pa).$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Angriffspunkte analog dem vorigen §, so läßt sich, wie am gedachten Orte, statt (3) auch setzen:

$$(4)\quad R (y \cos \varphi - x \sin \varphi) = \Sigma P (y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

Endlich erhält man aus (1) und (2)

$$(5)\quad R = \sqrt{[\Sigma (P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma (P \sin \alpha)]^2};$$
$$(6)\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Sigma (P \sin \alpha)}{\Sigma (P \cos \alpha)}.$$

Wofern sich nicht sämmtliche Kräfte des Systemes auf zwei Kräfte reduciren, deren Intensitäten gleich, deren Richtungen aber genau entgegengesetzt sind, vermag auch hier eine einzige Mittelkraft alle vorhandenen Seitenkräfte zu ersetzen.

Setzt man in den Gleichungen (1) bis mit (4) R = Null, so erhält man für die Gleichgewichtsbedingungen des Systemes:

$$(7)\quad \Sigma (P \cos \alpha) = 0;$$
$$(8)\quad \Sigma (P \sin \alpha) = 0;$$
$$(9)\quad \Sigma (Pa) = 0;$$ oder auch statt letzterer Gleichung
$$(10)\quad \Sigma P (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0.$$

Ist die Ebene, in welcher die Kräfte wirken, in irgend einem Punkte befestigt, so wird für's Gleichgewicht nicht erfordert, daß die Mittelkraft gleich Null sei, vielmehr reicht hierzu hin, daß die Richtung derselben durch gedachten Punkt gehe. Nimmt man daher diesen Punkt zum Ursprunge der Coordinaten, so wird die Gleichgewichtsbedingung allein durch die Gleichung (9) ausgedrückt, sobald natürlich der bemerkte Punkt den durch (5) angegebenen Druck auszuhalten, d. h. zu vernichten vermag.

§. 19.

Für den besonderen Fall, daß sämmtliche Kräfte zu einander parallel gerichtet sind, wird aus (1) und (2) des vorigen §

$R \cos \varphi = \cos \alpha \, \Sigma(P)$; $R \sin \varphi = \sin \alpha \, \Sigma(P)$, woraus man auch findet $\cos \varphi = \cos \alpha$, $\sin \varphi = \sin \alpha$ und somit

$$(1) \quad R = \Sigma(P);$$

d. h. die Mittelkraft ist gleich der Summe der parallelen Kräfte und ihre Richtung den Seitenkräften parallel. Zugleich ergiebt sich für die Lage der Mittelkraft

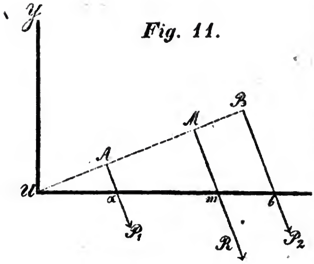
$$(2) \quad r = \frac{\Sigma(Pa)}{\Sigma(P)}.$$

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes sind sodann

$$(3) \quad \Sigma(P) = 0, \quad (4) \quad \Sigma(Pa) = 0.$$

Sowohl die in letzteren §§ erwähnten Ausnahmsfälle, bei der Frage, ob eine einzige Mittelkraft hinreicht, sämmtliche vorhandene Kräfte zu ersetzen, als weiter unten folgende Entwickelungen, machen es wünschenswerth, in Bezug auf zwei in der Ebene wirkende Parallelkräfte, einige besondere Betrachtungen anzustellen.

Fig. 11.



Es mögen P_1 und P_2 die beiden beliebigen Parallelkräfte sein, deren Richtungen die Abscissenaxe des Coordinatensystemes in den Punkten a und b schneiden. Fällt man sodann aus dem Coordinatenpunkte U eine Normale auf die Kraftrichtungen und sind A und B die betreffenden Durchschnittspunkte, so erhält man unmittelbar aus (2) für die Lage des Angriffspunktes M der zugehörigen Mittelkraft $= R$:

$$(5) \quad r = UM = \frac{P_1 \, . \, UA + P_2 \, . \, UB}{P_1 + P_2}, \text{ ferner}$$

$$(6) \quad R \, . \, UM = P_1 \, UA + P_2 \, . \, UB,$$ für welche letztere Gleichung man auch setzen kann

$$R \, . \, Um = P_1 \, . \, Ua + P_2 \, . \, Ub;$$

Gleichungen, die sich leicht in Worten als besondere Sätze ausdrücken lassen.

Hat die Kraft P_2 die entgegengesetzte Richtung von P_1, so gestaltet sich (5) zu

$$UM = \frac{P_1 \, . \, UA - P_2 \, . \, UB}{P_1 - P_2}.$$

Ist endlich dabei $P_1 = P_2$, so folgt $R =$ Null,

$$UM = \frac{P_1\, UA - P_2 \,.\, UB}{\text{Null}} = \infty.$$

Hieraus folgt aber der wichtige Satz:

Zwei gleiche, parallele Kräfte, die an verschiedenen Punkten in derselben Ebene wirken und deren Richtungen einander entgegengesetzt sind, haben niemals eine einzige Mittelkraft, können daher auch von einer *einzigen* Kraft nicht im Gleichgewichte gehalten werden.

Zwei Kräfte der bemerkten Art nennt man ein Kräftepaar (couple), oder auch kürzer »ein Paar« *).

Hierdurch erklären sich zugleich die früher erwähnten Ausnahmsfälle, hinsichtlich der Möglichkeit einer einzigen Mittelkraft.

Zuletzt mag hier noch eine Umgestaltung der Gleichung (6) Platz finden.

Mit Bezug auf Fig. 11 erkennt man leicht, daß selbige auch so geschrieben werden kann:

$$(P_1 + P_2)(UA + AM) = P_1 \,.\, UA + P_2\,(UA + AM + BM).$$

Hieraus aber, nach gehöriger Reduktion,

$$P_1 \,.\, AM = P_2 \,.\, BM, \text{ oder}$$

$$(7)\quad P_1 : P_2 = BM : AM.$$

Diese Proportion läßt sich ferner umformen zu

$$P_1 + P_2 : P_2 = BM + AM : AM,$$

wofür zu setzen ist

$$(8)\quad R : P_2 = AB : AM.$$

Endlich ergiebt sich aus der Verbindung von (7.) und (8.)

$$(9)\quad P_1 : P_2 : R = BM : AM : AB, \text{ d. h.}$$

jede der drei Kräfte P_1, P_2 und R ist dem Abstande proportional, welcher zwischen den Angriffspunkten der beiden andern enthalten ist.

Von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte solcher Kräfte, welche nicht in einerlei Ebene liegen und verschiedene Angriffspunkte haben, oder auf ein System unabänderlich mit einander verbundener Punkte wirken.

§. 20.

Sowohl der Einfachheit als Deutlichkeit der Darstellung wegen, behalten wir die allgemeine Beantwortung der hier zu erörternden Fragen einem später folgenden Kapitel vor, betrachten aber

*) Der ursprünglich von dem französischen Mathematiker Poinsot eingeführte Begriff „Couple“ wird wohl auch mit Gegenpaar, oder „gekoppelte Kräfte“ übersetzt.

hier den besonderen Fall, daß die Richtungen sämmtlicher im Raume wirkender Kräfte unter einander parallel sind.

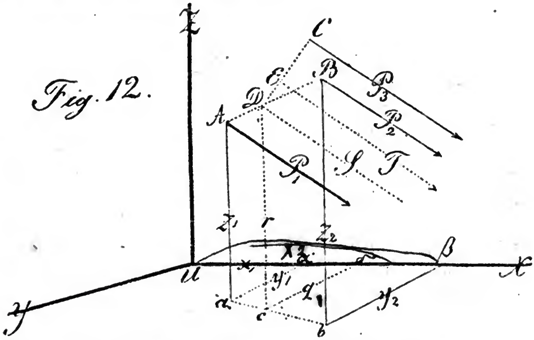
Hierzu mögen A, B, C ... Fig. 12. die Angriffspunkte der respect. Kräfte P_1, P_2, P_3 ..., und deren Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ... sein, wenn man das ganze System auf drei sich rechtwinklig schneidende Coordinaten-Ebenen XUY, XUZ und YUZ bezieht.

Der Figur nach ist daher für den Punkt A:

$Aa = z_1$, $a\alpha = y_1$, und $\alpha U = x_1$; ebenso für den Punkt B: $Bb = z_2$, $b\beta = y_2$, $\beta U = x_2$, u. s. f. für die übrigen Punkte.

Ferner sei noch S die Mittelkraft der beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2, welche durch die Coordinaten $Dc = r$, $c\delta = q$ und $\delta U = p$ bestimmt ist.

Fig. 12.



Zufolge (9) des vorigen § verhält sich jetzt

$$(1.)\quad S : P_2 = AB : AD.$$

Nach geometrischen Sätzen erhält man aber

$AB : AD = ab : ac = \alpha\beta : \alpha\delta$; demnach folgt aus (1.)

$$S : P_2 = \alpha\beta : \alpha\delta \text{ oder}$$

$$(2.)\quad S . \alpha\delta = P_2\ \alpha\beta.$$

Ferner ist $S = P_2 + P_2$, demnach auch

$$(3.)\quad S . U\alpha = P_1\ U\alpha = P_2\ U\alpha$$

Addirt man (2.) und (3.), so folgt:

$$S (U\alpha + \alpha\delta) = P_1\ U\alpha + P_2\ (U\alpha + \alpha\beta)$$

d. g. in Bezug auf die Figur:

$$S . U\delta = P_1\ U\alpha + P_2\ U\beta \text{ oder}$$

$$(4.)\quad Sp = P_1\ x_1 + P_2\ x_2;$$

führt man dieselbe Construction in Bezug auf die Ebenen XUZ und YUZ aus, so wird man erhalten:

$$(5.)\quad Sq = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 \text{ und}$$
$$(6.)\quad Sr = P_1\, z_1 + P_2\, z_2.$$

Ist nun weiter E der Angriffspunkt der Mittelkraft T, die zu den Kräften S und P_3 gehört, so folgt wie vorher

$T = S + P_3$, sowie, wenn die Coordinaten des Punktes E zu t, u und v gegeben sind:

$$Tt = Sp + P_3\, x_3;$$
$$Tu = Sq + P_3\, y_3;$$
$$Tv = Sr + P_3\, z_3.$$

und wenn man hier die Werthe aus (4.) bis mit (6.) einführt

$$T = P_1 + P_2 + P_3;$$
$$Tt = P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3;$$
$$Tu = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3;$$
$$Tv = P_1\, z_1 + P_2\, z_2 + P_3\, z_3.$$

Führt man auf diese Weise fort, so erhält man allgemein für beliebig viel Kräfte $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$, deren Mittelkraft R durch die Coordinaten x, y und z bestimmt ist:

$$\text{I.,}\quad \left\{ \begin{aligned} R &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n; \\ Rx &= P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 \dots P_n\, x_n; \\ Ry &= P_2\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3 \dots P_n\, y_n; \\ Rz &= P_1\, z_1 + P_2\, z_2 + P_3\, z_3 \dots P_n\, z_n. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist analog dem Früheren zu merken, daß jede Kraft sowohl, als auch jede Coordinate, mit dem zugehörigen Zeichen zu nehmen ist.

Sind die Coordinaten der Mittelkraft zu bestimmen, so erhält man, indem mit der ersten der vorstehenden vier Gleichungen in jede der folgenden dividirt wird:

$$\text{II.,}\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 \dots P_n\, x_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n}; \\ y &= \frac{P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3 \dots P_n\, y_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n}; \\ z &= \frac{P_1\, z_1 + P_2\, z_2 + P_3\, z_3 \dots P_n\, z_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots P_n}. \end{aligned} \right.$$

Liegen die Kraftrichtungen alle in einer Ebene, so ist, indem wir die Axen X und Y in dieser Ebene annehmen, $z, = z_1 = z_2 = z_3 = \dots z_n = 0$ zu setzen.

Da zugleich in den vorstehenden Gleichungen nichts vorkommt, was Bezug auf die Neigungen der Kraftrichtungen gegen die Coordinaten-Axen hat, so können sich die Kräfte gleichmäßig um ihre Angriffspunkte drehen, ohne daß der Angriffspunkt der Mittelkraft geändert wird, natürlich vorausgesetzt, daß die Intensitäten der Kräfte dieselben und ihre Richtungen unter einander parallel bleiben. Wegen dieser Eigenschaft nennt man

den Angriffspunkt der Mittelkraft »den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.«

Ist nicht der Mittelpunkt der parallelen Kräfte selbst zu bestimmen, sondern nur ein Punkt anzugeben, durch welchen die Richtungslinie der Mittelkraft gehen soll, so nehme man an, daß die Ebene XUY rechtwinkelig auf den Kraftrichtungen steht; hierdurch fällt die vierte der Gleichungen in I. ganz weg, indem es sich dann nur darum handelt, die Coordinaten der Projection der Mittelkraft auf der gedachten Ebene anzugeben. Man erhält demnach die Gleichungen:

$$\text{III.,}\quad \begin{cases} R = P_1 + P_2 + P_3 + P_3 \ldots . P_n\,; \\ Rx = P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 + \ldots . P_n\, x_n\,; \\ Ry = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3 + \ldots . P_n\, y_n. \end{cases}$$

Endlich erhält man für den Zustand des Gleichgewichts, wofür $R = 0$ ist, aus I:

$$\text{IV.,}\quad \begin{cases} 0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_3 \ldots . P_n\,; \\ 0 = P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 + \ldots . P_n\, x_n\,; \\ 0 = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3 + \ldots . P_n\, y_n\,; \\ 0 = P_1\, z_1 + P_2\, z_2 + P_3\, z_3 + \ldots . P_n\, z_n. \end{cases}$$

Ferner für den Fall, daß die Ebene XUY rechtwinkelig auf den Kraftrichtungen steht, aus III:

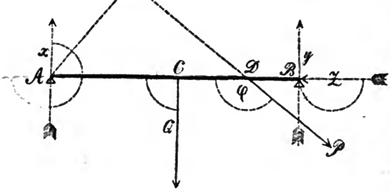
$$\text{V.,}\quad \begin{cases} 0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_3 \ldots . P_n\,; \\ 0 = P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 + \ldots . P_n\, x_n\,; \\ 0 = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + P_3\, y_3 + \ldots . P_n\, y_n. \end{cases}$$

§. 21.

Für die spezielle Anwendung der in den letzteren Paragraphen entwickelten allgemeinen Gleichungen, folgen hier nachstehende Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein gewichtsloser unbiegsamer Stab AB Fig. 13. liegt in horizontaler Richtung mit seinen Enden auf festen Stützen, in der Mitte C desselben wirkt vertikal abwärts eine Kraft Q und an einem anderen Punkte D eine Kraft P, deren Richtung mit AB den Winkel φ einschließt; man soll die hierdurch auf die Stützen erzeugten Vertikalpressungen x und y, so wie die Horizontalpressung $= z$ ebendaselbst, angeben.

Fig. 13.



Auflösung. Man setze $AB = l$, $AC = a$, $CD = b$, beachte die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit AB in einerlei Sinne bilden und wähle A zum Momentenpunkte, so ergiebt sich unmittelbar nach den Gleichungen 7, 8 und 9 des §. 18.

$$Q \cos 90 + P \cos \varphi + (x + y) \cos 270 + z \cos 180 = 0;$$
$$Q \sin 90 + P \sin \varphi + (x + y) \sin 270 + z \sin 180 = 0;$$
$$Qa + P(a + b) \sin \varphi - ly = 0.$$

wofür zu schreiben ist

$$P \cos \varphi - z = 0,$$
$$Q + P \sin \varphi - (x + y) = 0,$$
$$Qa + P(a + b) \sin \varphi - ly,$$

aus welchen Gleichungen aber x, y und z leicht gefunden werden können.

Für P = Null folgt

$$(1.)\ x = \frac{l - a}{l} \cdot Q;\ (2.)\ y = \frac{a}{l} \cdot Q.$$

Die Bestimmungen (1.) und (2.) werden bei technischen Fragen oft gebraucht, weshalb sie, als besondere Regeln, gemerkt zu werden verdienen.

Wollte man auf dieselbe Weise den Fall behandeln, daß der vorgedachte Stab in drei Punkten unterstützt ist, so würde der Druck auf einen der Unterstützungspunkte unbestimmt bleiben. Die Ursache hiervon liegt jedoch keineswegs in der Unrichtigkeit unserer allgemeinen Gleichungen, sondern einzig und allein darin, daß wir den Stab als vollständig unbiegsam und die Unterstützungspunkte als nicht nachgebend angenommen haben. Mit gehöriger Beachtung der Elastizität der Körper läßt sich die ganze Frage vollständig beantworten.

Aufgabe 2. Eine feste (unbiegsame) Ebene ist bei horizontaler Lage in den drei Punkten A, B und C Fig. 14. unterstützt, in einem Punkte S wirkt rechtwinkelig auf dieselbe eine Kraft P; man soll die Pressungen angeben, welche hierdurch die Unterstützungspunkte erfahren.

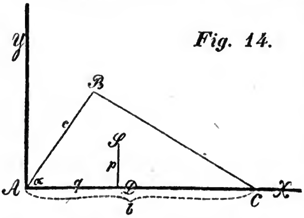


Fig. 14.

Auflösung. Man denke sich durch AC in vertikaler Richtung eine Coordinaten-Ebene AX und rechtwinkelig gegen diese eine zweite AY gelegt, setze $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, die zu P gehörigen Coordinaten, d. i. $SD = p$, $DA = q$ und bezeichne die zu suchenden Pressungen der Punkte C, B und A respective mit x, y und z, so lassen sich nach V. §. 20. unmittelbar folgende drei Gleichungen bilden

$$0 = P - x - y - z;$$
$$0 = Pq - y \cdot c \cdot \cos\alpha - bx;$$
$$0 = Pp - y \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Hieraus sind aber die unbekannten Größen leicht zu reduciren *).

Bei vier Unterstützungspunkten derselben Ebene wird auch hier die Frage wieder eine unbestimmte.

Von den Kräftepaaren.

§. 22.

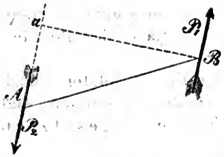
Aus den Sätzen über das Gleichgewicht von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten, ließe sich zwar entnehmen, daß die Gleichungen, deren Glieder die statischen Momente der Kräfte darstellen, eigentlich nichts anderes als die Bedingung enthalten, unter welcher Gleichgewicht gegen Drehung eintritt; allein wir haben absichtlich die Hervorhebung dieser Eigenschaft vermieden, weil solche in der That aus dem geraden Gange der Entwickelungen nicht unmittelbar hervorgeht.

Durch Einführung der §. 19. mit dem Namen »Paare« benannten Kräfte, erhält man nicht nur in letzterer Hinsicht vollständigen Aufschluß, sondern es werden auch gleichzeitig Mittel geboten, andere noch rückständige Sätze der allgemeinen Statik auf höchst einfache Weise abzuleiten.

§. 23.

Bevor wir zu den desfallsigen Entwickelungen schreiten, sind einige Begriffsbestimmungen anzuführen.

Fig. 15.



Die gerade Verbindungslinie AB Fig. 15. der Angriffspunkte der beiden ein Paar bildenden Kräfte $P_1 = P_2$, wird der Arm des Paares und der normale Abstand aB ihrer Richtungen die **Breite** des Paares genannt.

Aus Grundsatz (3.) §. 7. folgt unmittelbar, daß man ohne eine Aenderung den Arm eines Paares immer der Breite desselben gleich machen kann.

Das Produkt aus der einen oder andern der beiden das Paar bildenden Kräfte in die Breite desselben, nennt man das **Moment des Paares**. Jede Normale auf der Ebene errichtet, in welcher das Paar liegt, wird **die Axe des Paares** genannt.

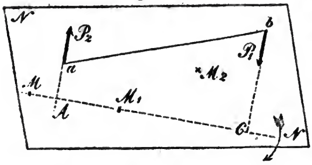
---

*) Ist S der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, so läßt sich mit Zuziehung der Sätze des §. 45. zeigen, daß $p = \frac{1}{3} c \cdot \sin\alpha$, $q = \frac{1}{3}(b + c \cdot \cos\alpha)$ und $x = y = z = \frac{1}{3} P$ ist.

§. 24.

Untersuchen wir nun, worin die Wirkung eines Paares besteht.

Fig. 16.



Es sei AC die Breite eines Paares P_1, P_2 und M ein beliebiger Punkt in der Richtung von AC, durch welchen wir eine Axe des Paares gehend denken wollen. Das vereinte Bestreben der beiden gleichen Kräfte wird nun darin bestehen, die materielle Ebene NN des Paares nach der Richtung des beigezeichneten Pfeiles um den Punkt (die Axe) M in eine Drehung zu versetzen und das Maaß dieser Bestrebung oder Wirkung wird die Differenz der statischen Momente der beiden Kräfte in Bezug auf den Punkt M, nämlich

$$MC \cdot P_1 - MA \cdot P_2, \text{ oder wegen } P_1 = P_2$$

$$P_1 (MC - MA) = P_1 \cdot AC,$$ d. i. das Moment des Paares sein.

Dasselbe wird erhalten, wenn der Punkt M irgend wo z. B. in M_1, M_2 ... zwischen den Richtungen der Paare angenommen wird. Sodann ist nämlich, ähnlich wie vorher,

$$M_1 C \cdot P_1 + M_1 A \cdot P_2 = P_1 (M_1 C + M_1 A)$$

d. i. wieder $P_1 \cdot AC$;

u. s. f. für alle anderen Punkte der Ebene NN.

Ueberhaupt besteht also die Wirkung eines Paares darin, die materielle Ebene, worin dasselbe liegt, um irgend eine Axe des Paares zu drehen. Das, diese Wirkung messende Moment des Paares ist zugleich unabhängig von der Lage des Punktes, in welchem die Drehaxe gedacht wird.

Je nachdem zwei Paare in derselben Ebene letztere nach gleicher oder entgegengesetzter Richtung zu drehen streben, sagt man, die Paare haben einerlei oder entgegengesetzten Sinn.

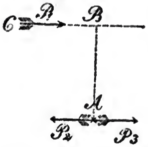
Zusatz. Der Sinn (die Drehrichtung) eines Paares kann auch durch die Lage seiner Axe bestimmt werden. Denn setzt man z. B. fest, daß die bewirkte Drehung immer in demselben Sinne erscheinen soll, wenn man von dem freien Endpunkte einer Axe (von bestimmter Länge) nach einen der Angriffspunkte der Kräfte hinblickt, so wird hierzu erforderlich sein, die Axe auf der einen oder andern Seite (über oder unter) der Ebene zu errichten.

§. 25.

Um den Unterschied zwischen dem statischen Momente

einer einzelnen Kraft und dem Momente eines Paares noch mehr hervorzuheben, diene folgende Betrachtung.

Fig. 17.



$P_3 = P_2 = P_1$

Es sei C der Angriffspunkt, CB die Richtung einer beliebigen Kraft P_1, ferner A ein Punkt in der Ebene von P_1, der mit C auf irgend eine Weise unabänderlich verbunden ist. Das statische Moment von P_1 in Bezug auf A ist sodann, wenn AB normal auf BC steht: $P.AB$. Bringt man nun in A, parallel zu P_1 gerichtet, zwei genau entgegengesetzte Kräfte an, so wird an der Wirkung von P_1 nichts geändert. Allein man kann sich P_1 in C oder B ersetzt denken durch P_3 in A, nach derselben Richtung wie P_1 wirkend und durch ein Paar P_1, P_2 von der Breite $= AB$, dessen Moment $P_1 . AB$, gleich dem statischen Momente von P_1 in C in Bezug auf demselben Punkt A ist.

Es ist folglich das Moment eines Paares das Maß einer besonderen Kraft, nämlich der Intensität des Paares, welches bei der Transponirung einer einzelnen Kraft parallel zu sich selbst nach einem bestimmten Punkte hin entsteht, sobald an der Wirkung der letzteren Kraft nichts geändert werden soll.

Gleichzeitig ergiebt sich aber aus dieser Betrachtung ein für alle Folgen wichtiger Satz:

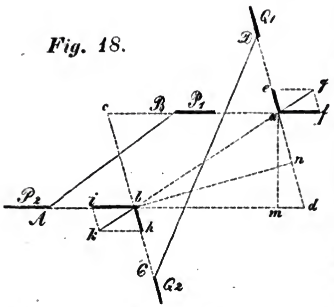
Jede einzelne Kraft P_1 kann man, parallel zu sich selbst, nach einem anderen beliebigen Angriffspunkt A fortrücken, wenn man nur gleichzeitig in der Ebene von P_1 ein Paar anbringt, dessen Moment dem statischen Momente der gegebenen Kraft in Bezug auf den Punkt A gleich ist und dessen Sinn durch die ursprüngliche Richtung von P in C bestimmt ist, in welchem diese Kraft die Ebene um A drehen würde.

§. 26.

Wir wollen nunmehro zeigen, daß die Zusammensetzung, Zerlegung und Versetzung der Paare eben so vorgenommen werden kann, wie wir solches für einfache Kräfte bereits kennen gelernt haben. Hierzu beweisen wir vorerst nachstehenden Satz:

Zwei in derselben Ebene wirkende Paare P_1, P_2 und Q_1, Q_2, halten einander im Gleichgewichte, sobald sie gleiche Momente und entgegengesetzten Sinn haben.

Fig. 18.



Man verlängere die Richtungen der an den Armen *AB* und *DC* wirkenden Paare P_1, P_2 und Q_1, Q_2 bis sich solche in den Punkten *a* und *b* schneiden, auch gleichzeitig ein Parallelogramm *abcd* gebildet wird. Sodann versetze man die Angriffspunkte von P_1 und Q_1 nach *a*, die von P_2 und Q_2 nach *b*, finde zu ersteren die Mittelkraft *ag*, zu letzteren die *bk*, welche der Größe nach offenbar einander gleich sein müssen. Damit sich solche, obiger Bedingung zufolge, auch aufheben, müssen die Richtungen beider in dieselbe Gerade fallen, was noch nachzuweisen ist. Man ziehe deshalb die Normalen *am* und *bn* als die Breiten der respectiven Paare, so ist nach der Voraussetzung $P_1 \cdot am = Q_1 \cdot bn$, d. i. $P_1 : Q_1 = bn : am$, also auch wegen $bn \cdot ad = am \cdot bd$, $P_1 : Q_1 = bd : ad$, d. i. $af : ae = bi : bh = bd : ad$, d. h. *ag* und *bk* liegen in derselben Geraden w. z. b. w.

Hieraus lassen sich noch folgende Sätze ableiten:

1) Paare von gleichen Momenten, die in derselben Ebene in einerlei Sinn wirken, können einander ersetzen oder sie sind gleichgeltend.

2) Die Momente der Paare verhalten sich bei gleichen Seitenkräften wie ihre Breiten und bei gleichen Breiten wie ihre Seitenkräfte.

3) Beliebig viele in einerlei Ebene wirkende Paare, deren Momente $P_1\,p_2$, $P_2\,p_2$, $P_3\,p_3 \ldots . P_n\,p_n$ sind, lassen sich ohne ihre Wirkung auf die (materielle) Ebene zu ändern, durch ein einziges, resultirendes Paar $= R, R_1$ von der Breite $= \varrho$ ersetzen, sobald man der Bedingungsgleichung genügt

$$R\varrho = P_1\,p_1 + P_2\,p_2 + P_3\,p_3 + \ldots P_n\,p_n = \Sigma\,(Pp).$$

Deshalb kann man aber auch solche Paare durch ein einziges Paar von gegebener Breite ϱ ersetzen, dessen Werth ist

$$R = \frac{\Sigma\,(Pp)}{\varrho}.$$

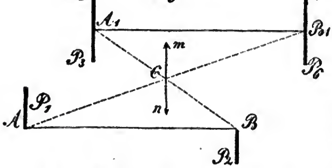
In beiden letzteren Fällen bestimmt das relative Zeichen von $\Sigma\,(Pp)$ den Sinn des resultirenden Paares.

§. 27.

Ein Paar läßt sich in seiner Ebene oder auch in jede

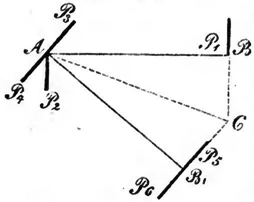
Parallelebene beliebig versetzen und in dieser Ebene drehen, sobald die Paare gleiche Momente und gleichen Sinn behalten und die neuen Angriffspunkte mit den alten auf unveränderliche Weise verbunden bleiben. Für den ersten Theil dieses Satzes sei P_1, P_2 das gegebene Paar und AB Fig. 19. dessen Breite. In derselben oder in einer parallelen Ebene ziehe man $A'B'$ parallel und gleich AB, bringe an A' wie an B' zwei den vorigen gleiche und parallele, unter sich entgegengesetzte Kräfte P_3, P_4, P_5 und P_6 an, wodurch die Wirkung von P_1, P_2 nicht geändert werden kann. Ferner ziehe man die Geraden AB' und BA', welche sich nothwendig in C gegenseitig halbiren.

Fig. 19.



Nach §. 19. lassen sich sodann P_1 und P_4 durch $2\,P_1 = 2\,P_4$ in C von C nach m wirkend, so wie P_3 und P_2 ebendaselbst durch $2\,P_3 = 2\,P_2$ aber von C nach n wirkend, ersetzen. Die in C jetzt angebrachten Kräfte werden sich jedoch aufheben und überhaupt nur das Paar P_5, P_6 an $A'B'$ wirkend übrig bleiben etc.

Fig. 20.



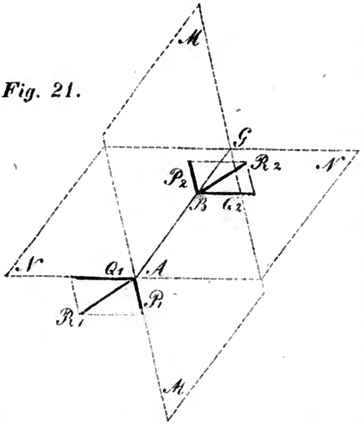
Für den Beweis des zweiten Theiles unseres Satzes sei AB Fig. 20. die Breite des gegebenen Paares P_1, P_2. Man denke sich AB um A gedreht und in die Lage AB' gebracht. In A wie in B' bringe man zwei normale, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_3, P_4 und P_5, P_6 an jede gleich $P_1 = P_2$. Verlängert man die Richtungen von P_1 und P_6 bis sich solche in C schneiden, so wird die Verbindungslinie von C mit A, d. i. CA den Winkel BAB' halbiren. Sodann geben aber P_1, P_6 in der Richtung von C nach A dieselbe Mittelkraft wie P_2 und P_3 in der Richtung von A nach C, d. h. die genannten Kräfte vernichten sich und es verbleibt nur das mit dem ersten (P_1, P_2) gleichgeltende Paar P_4, P_5, w. z. b. w.

§. 28.

Parallelogramm der Paare.

Es bleibt nunmehr noch übrig, die Zusammensetzung und Zerlegung von Paaren nachzuweisen, die in nicht parallelen Ebenen wirken.

Fig. 21.



Man denke sich zu diesem Ende zwei ganz verschiedene Paare in den respect. Ebenen *MM* und *NN* Fig. 21. liegend, deren Durchschnittslinie *AG* ist.

Beide Paare bringe man auf gleiche Breiten und die hierdurch erhaltenen Seitenkräfte der Paare mögen P_1, P_2 und Q_1, Q_2 sein. Ferner verlege man sie so, daß ihre Breite *AB* in die vorgedachte Durchschnitts-Linie *AG* fällt. Sodann geben aber P_1, Q_1 eine Mittelkraft R_1 in *A*, und P_2, Q_2 eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte R_2 in *B*, welche beide das resultirende Paar bilden, dessen Breite einerlei mit jener der vorigen Paare ist.

Umgekehrt wird sich auch jedes Paar in zwei andere in verschiedenen Ebenen liegende Paare zerlegen lassen, sobald sich nur die Ebenen der Seitenpaare mit jener des resultirenden Paares in derselben oder in parallelen Geraden schneiden.

Zusatz. Mit Hülfe der Axen der Paare lassen sich vorstehende Sätze noch auf andere Weise darstellen.

Bereits §. 24. wurde bemerkt, wie man mittels der Axe den Sinn eines Paares auszudrücken vermag, hier werde vorerst noch darauf aufmerksam gemacht, daß es zufolge der Natur der Axen immer leicht sein wird, die Axen zweier in nicht parallelen Ebenen liegenden Paare so anzubringen, daß solche in einerlei Ebene zu liegen kommen. Trägt man sodann auf jede dieser Axen die Größe des Momentes des zugehörigen Paares auf, so lassen sich zwei an demselben Punkte angreifende Seitenkräfte bilden, zu denen durch die bekannte Construction eines Parallelogrammes die zugehörige Mittelkraft gefunden werden kann.

Die Diagonale eines solchen Parallelogrammes muß aber der Richtung nach die Axe und der Größe nach das Moment des resultirenden Paares darstellen.

Ueberhaupt folgt hieraus, daß man mit Hülfe der Axen die Paare eben so durch einfache Linien darzustellen im Stande ist wie einfache Kräfte, mithin das Parallelogramm der Paare für Drehkräfte dieselbe Wichtigkeit hat, als unser früher betrachtetes Parallelogramm für progressiv wirkende Kräfte.

Analog den Sätzen des §. 15. wird es daher eben so ein Parallelepipedum der Paare wie der einfachen Kräfte geben etc. etc.

Bezeichnen sonach L, M und N die Momente von Paaren, deren respective Axen die drei Kanten eines Parallelepipedums bilden, so wird man für das Moment $= G$ des resultirenden Paares erhalten

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Sind ferner λ, μ, ν die Winkel, welche die Axe von G mit den drei rechtwinkeligen Coordinaten-Axen bildet, so muß ebenfalls sein:

$$\cos\lambda = \frac{L}{G};\ \cos\mu = \frac{M}{G};\ \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Zusammensetzung und Gleichgewicht von beliebig im Raume gerichteten Kräften, die auf ein fest verbundenes System von Punkten wirken.

§. 29.

Nimmt man die §. 25. gezeigte Versetzung einer einzelnen Kraft mit allen n Kräften vor, die beliebig gerichtet an einem festen Systeme wirken, so ist klar, daß man sie sämmtlich nach einem willkürlich im System gewählten Punkte (Versammlungspunkte) parallel zu sich selbst fortrücken und dort gleichzeitig angreifen lassen kann, wenn man nur zugleich am Systeme n Paare anbringt, deren Momente die statischen Momente der respectiven einzelnen Kräfte in Bezug auf den gewählten Versammlungspunkt sind.

Die Ebenen der n Gegenpaare liegen natürlich in den respectiven Richtungen der n Kräfte des Systemes.

Alle Kräfte im Versammlungspunkte lassen sich aber in eine einzige Kraft, so wie alle Paare in ein einziges resultirendes Paar zusammensetzen, dessen Ebene im Allgemeinen gegen die Richtung der Einzelkraft geneigt sein, mit dieser in verschiedenen Ebenen liegen wird.

Es sind also beliebig viel Kräfte an einem festen Systeme, gleichgeltend einer einzelnen Kraft an einem willkürlich gewählten Punkte in Verbindung mit einem entsprechenden Paare.

In Betreff der vielen auf solche Weise möglichen Reduktionen werde nur noch bemerkt, daß sich der Versammlungspunkt auch immer so wählen läßt, daß die Ebene des resultirenden Paares rechtwinklig auf der Richtung der einzelnen Kraft steht.

In den meisten Fällen kann das resultirende Paar und die einzelne Kraft durch eine einzige Resultante ersetzt werden, wozu die Bedingung folgende ist.

Es sei G_1, G_2 das resultirende Paar, R die Einzelkraft und R' die gemeinschaftliche Resultante, so wird R mit R' ebenfalls

ein Paar bilden müssen, welches mit G_1, G_2 in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegt und zu letzteren entgegengesetzten Sinn hat, sobald sich beide Paare aufheben sollen.

Gleichzeitig folgt hieraus, daß zwei Kräfte, die mit ihren Richtungen in verschiedenen Ebenen liegen, niemals eine einzige Resultante haben können, indem immer anzunehmen sein wird, daß beide Kräfte aus einer anderen Kraft und einem nicht parallelen Paare hervorgegangen sind.

Soll Gleichgewicht zwischen den Kräften im Raume, an einem festen Systeme, bestehen, so folgt im Allgemeinen, daß sowohl das Moment des resultirenden Paares als auch die Einzelkraft = Null sein muß.

§. 30.

Wir gehen nunmehr dazu, die Sätze des vorigen § durch allgemeine Gleichungen auszudrücken.

Irgend ein Punkt des Systemes, an welchem die Kräfte im Raume wirken, werde deshalb zum Ursprunge dreier auf einander rechtwinkliger Coordinaten gewählt, die einzelnen Kräfte mit P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ bezeichnet, ferner die respectiven Neigungswinkel derselben gegen die drei Coordinaten-Axen mit α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; .... und die Coordinaten ihrer Angriffspunkte mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ....

Jede der bemerkten Kräfte zerlege man zuerst, wie §. 16, in Seitenkräfte $P_1 \cos \alpha_1$, $P_1 \cos \beta_1$, $P_1 \cos \gamma_1$; $P_2 \cos \alpha_2$, $P_2 \cos \beta_2$, $P_2 \cos \gamma_2$; .... sodann versetze man jede derselben nach §. 29. parallel zu sich selbst in den Coordinatenpunkt. Hierdurch erhält man überhaupt

1. Ein System von einzelnen Kräften, die sämmtlich am Coordinatenpunkte angreifen und nach den Richtungen der Coordinaten-Axen wirken.

2. Ein System von Kräftepaaren, deren je zwei Kräfte parallel zu den Coordinaten-Axen gerichtet sind.

In Betreff der Einzelkräfte folgt sodann, ganz wie §. 16, und wenn man die dortigen Bezeichnungen auch hier beibehält

$$\text{I.} \begin{cases} R \cos a = \Sigma\,(P \cos \alpha); \\ R \cos b = \Sigma\,(P \cos \beta); \\ R \cos c = \Sigma\,(P \cos \gamma). \end{cases}$$

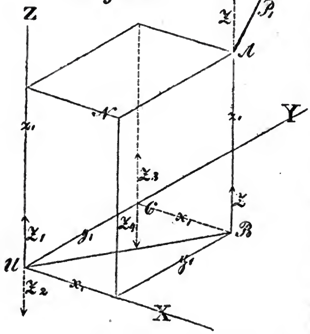
Was die erhaltenen Paare anlangt, so wollen wir erst die aus der Versetzung von $P_1 \cos \alpha_1$, $P_1 \cos \beta_1$, $P_1 \cos \gamma_1$ entstandenen einer ausführlichen Betrachtung unterwerfen.

Hierzu werde vor allem bemerkt, daß wir hinsichtlich des Sinnes derselben diejenigen positiv setzen wollen, welche in den Richtungen drehen:

von z nach y um x, von x nach z um y und von y nach x um z.

Der Kürze wegen bezeichnen wir $P \cos \gamma_1$ mit $Z = Z_1 = Z_2 \ldots$; $P \cos \beta_1$ mit $Y, Y_1, Y_2 \ldots$; $P \cos \alpha_r$ mit $X, X_1, X_2 \ldots$ um für dieselbe Kraft von immer gleicher Größe doch die Verschiedenheit ihrer Richtung und Lage auszudrücken.

Fig. 22.

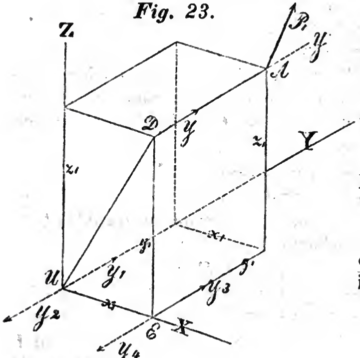


Die Seitenkraft Z in A Fig. 22. kann man sich zunächst in B angreifend vorstellen, worauf durch deren Versetzung von B nach U die Einzelkraft Z_1 und das Paar Z, Z_2 entstehen wird, dessen Moment $Z \,.\, UB = Z\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$ ist.

Nach §. 28. kann letzteres ersetzt werden durch zwei andere Paare Z, Z_4 und Z_2, Z_3 *) die in den Ebenen xz und yz wirken, deren Momente sind: $x_1 Z = x_1 \,.\, P_1 \cos \gamma_1$ und $y_1 Z = y_1 P_1 \cos \gamma_1$, oder mit Beachtung der Drehrichtung:

(1) $+ x_1 P_1 \cos \gamma_1$ in der Ebene xz um y;
(2) $- y_1 P_1 \cos \gamma_1$ » » » zy » x.

Fig. 23.



Eben so ist das zu Y_1 Fig. 23. in U gehörige Paar Y, Y_2 und sein Moment $Y\sqrt{x_1{}^2 + z_1{}^2}$; dasselbe kann wieder ersetzt werden durch die Paare Y, Y_4 und Y_2, Y_3, deren Momente sind:

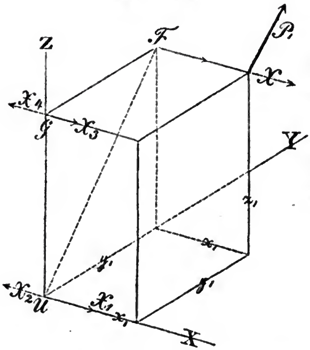
$$z_1 Y = z_1 P_1 \cos \beta_1,$$
$$x_1 Y = x_1 P_1 \cos \beta_1,$$

oder, mit Rücksicht auf ihren Sinn,

*) Man beachte, daß es sich hier um die Zerlegung eines Paares in zwei andere mit Beibehaltung derselben Kräfte handelt und daß sich solche Paare wie ihre respect. Breiten verhalten. Zur fernern Deutlichkeit kann man sich auch das Paar Z, Z_4 in die Parallelebene UN versetzt denken.

(3) $+ z_1 P_1 \cos\beta_1$ in der Ebene zy um x;
(4) $- x_1 P_1 \cos\beta_1$ » » » yx » z.

Fig. 24.



Endlich ist das Moment des zu X_1 in U gehörigen Paares X, X_2, d. i. $X\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$, durch die Paare X, X_4 und X_2, X_3 zu ersetzen, deren Momente sind: $y_1 X = y_1 P_1 \cos\alpha_1$ und $z_1 X = z_1 P_1 \cos\alpha_1$, oder mit Bezug auf den Sinn derselben:

(5) $+ y_1 P_1 \cos\alpha_1$ in der Ebene yx um z;
(6) $- z_1 P_1 \cos\alpha_1$ » » » xz » y.

Durch Addition der in einerlei Ebene liegenden Paare erhält man sodann

$P_1 (z_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\gamma_1)$ in der Ebene zy;
$P_1 (x_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\alpha_1)$ » » » xz;
$P_1 (y_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\beta_1)$ » » » yx.

Verfährt man auf gleiche Weise mit den Paaren aller übrigen Kräfte, so findet man, wenn deren respect. Summen in Bezug auf die drei Coordinatenaxen mit L, M, N bezeichnet werden

$$\text{II.} \quad \begin{cases} L = \Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma); \\ M = \Sigma P(x \cos\gamma - z \cos\alpha); \\ N = \Sigma P(y \cos\alpha - x \cos\beta). \end{cases}$$

wofür man, der Analogie wegen, setzen kann, wenn x', y', z' die Coordinaten von R bezeichnen,

$$\text{III.} \quad \begin{cases} R(z' \cos b - y' \cos c) = \Sigma P(z \cos\beta - y \cos\gamma); \\ R(x' \cos c - z' \cos a) = \Sigma P(x \cos\gamma - z \cos\alpha); \\ R(y' \cos a - x' \cos b) = \Sigma P(y \cos\alpha - x \cos\beta). \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen für die Progressiv-Kräfte in I. und der für die Drehkräfte in II. oder III. lassen sich jetzt alle zur Bestimmung der Mittelkraft erforderlichen Größen ableiten, sofern überhaupt eine einzige Mittelkraft möglich ist etc., überhaupt alle hierhergehörigen Fragen beantworten.

Unter letzterer Voraussetzung folgt aus I.

$$R = \sqrt{\{\Sigma(P\cos\alpha)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\beta)\}^2 + \{\Sigma(P\cos\gamma)\}^2};$$

$$\cos a = \frac{\Sigma(P\cos\alpha)}{R}; \quad \cos b = \frac{\Sigma(P\cos\beta)}{R}; \quad \cos c = \frac{\Sigma(P\cos\gamma)}{R}.$$

Zur Bestimmung der Lage der Mittelkraft setze man

$$R\cos a = X', \; R\cos b = Y', \; R\cos c = Z',$$

sodaß aus II. und III. folgt

$$(m) \begin{cases} L = z'Y' - y'Z'; \\ M = x'Z' - z'X'; \\ N = y'X' - x'Y'. \end{cases}$$

Auf den ersten Blick scheint es, als ließen sich aus diesen drei Gleichungen die Coordinaten der Mittelkraft reduciren, allein entfernt man hierzu aus den beiden ersten zuvörderst z' und bringt sodann die erhaltenen Gleichungen mit der dritten zusammen, so ergiebt sich

$$(n) \quad LX' + MY' + NZ' = 0.$$

Eine Gleichung, die jene Coordinaten gar nicht mehr enthält, vielmehr nur angiebt, unter welcher Voraussetzung die Gleichungen (m) möglich sind, nämlich unter der, daß sich alle Kräfte auf eine einzige Mittelkraft zurückführen lassen.

Um demungeachtet die Lage der letzteren bestimmen zu können, verfährt man am einfachsten so, daß man die Coordinaten des Punktes angiebt, in welchem die Richtung der Mittelkraft irgend eine der Coordinatenebenen schneidet. So erhält man z. B. für einen solchen Punkt in der Ebene XY, wenn $z' = 0$ gesetzt wird, aus (m)

$$y' = -\frac{L}{Z'}; \quad x' = \frac{M}{Z'}. \text{ etc.}$$

Wenn jede der partiellen Resultanten X', Y' und Z' für sich allein gleich Null ist, so wird zwar der Bedingungsgleichung (n) Genüge geleistet, allein man erkennt bald, daß sich sodann sämmtliche Kräfte auf ein Paar reduciren müssen, folglich eine einzige Mittelkraft nicht möglich ist.

Als Bedingungsgleichungen für das vollständige Gleichgewicht erhält man aus I. und II.

$$\Sigma(P\cos\alpha) = 0; \; \Sigma(P\cos\beta) = 0; \; \Sigma(P\cos\gamma) = 0; \text{ und}$$
$$\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0; \; \Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0;$$
$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0.$$

Hiervon beziehen sich die drei ersten Gleichungen auf das Gleichgewicht gegen fortschreitende, die drei andern auf das gegen drehende Bewegung.

Für $z = 0$ und $y = 0$ erhält man zugleich den besondern Fall, für welchen die Gleichungen des §. 18. entwickelt wurden, deren Bedeutungen etc. im Vorstehenden zugleich mit erörtert sind.

Zusatz. Zur noch besseren Einsicht, daß die Gleichung (n) die Bedingung einer einzigen Mittelkraft ausdrückt, diene Nachstehendes. Wir fanden vorher

$$(p) \left\{ \cos a = \frac{X'}{R},\ \cos b = \frac{Y'}{R},\ \cos c = \frac{Z'}{R}. \right\}$$

Construirt man ferner nach §. 28. mit den Axen der Paare L, M, N das Parallelepipedum der Paare und sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Axe des resultirenden Paares $= G$ mit den drei Coordinatenaxen bildet, so folgt

$$(q) \left\{ \cos \lambda = \frac{L}{G},\ \cos \mu = \frac{M}{G},\ \cos \nu = \frac{N}{G}. \right\}$$

Im Allgemeinen wird sich die Richtung von R mit der Axe von G unter irgend einen Winkel $= \varepsilon$ schneiden, für welchen man, gegenwärtigen Bezeichnungen nach, zufolge eines geometrischen Satzes erhält

$$(r)\ \cos \varepsilon = \cos \lambda \cos a + \cos \mu \cos b + \cos \nu \cos c.$$

Für den Fall einer einzigen Mittelkraft muß aber nach §. 29. die Axe des resultirenden Paares auf der Ebene von R rechtwinklig stehen, d. h. $\angle \varepsilon$ muß 90°, also $\cos \varepsilon = 0$ sein. Daher, wenn man dies beachtet und in (r) die entsprechenden Werthe aus (p) und (q) substituirt, folgt

$$0 = LX' + MY' + NZ',$$

was nachzuweisen war.

§. 31.

Vorstehende Untersuchungen über das Gleichgewicht von Kräften im Raume an einem festen Systeme, gelten, mag letzteres ein völlig freies sein oder nicht. Indessen leuchtet ein, daß für ein nicht freies System die aufgestellten Bedingungen nur theilweise erfüllt zu sein brauchen.

Den Fall z. B. wenn ein Punkt des Systemes fest ist, haben wir bereits §. 18. für Kräfte in der Ebene erörtert. Aehnliches läßt sich für Kräfte im Raume nachweisen.

In dem Falle, daß sich das materielle System gegen einen Punkt einer (festen) Fläche stützt, wird für's Gleichgewicht nur erforderlich sein: 1) daß sich sämmtliche Kräfte auf eine einzige Mittelkraft zurückführen lassen; 2) daß die Richtung derselben mit der im Stützpunkte der Fläche errichteten Normale zusammenfällt. Begreiflicher Weise muß dabei die Fläche einen entsprechenden Gegendruck leisten, sobald jene Mittelkraft aufgehoben werden soll.

Letzterer Satz läßt sich überhaupt als ein allgemeiner Grundsatz der Statik aufstellen und so ausdrücken, daß man sagt:

Druck und Gegendruck müssen einander gleich und genau entgegengesetzt sein, sobald Gleichgewicht eintreten soll.

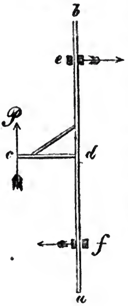
Zusatz. Nach Einführung entsprechender Gegendrücke unter die Kräfte eines nichtfreien Systemes, wird man dasselbe als ein völlig freies betrachten können.

§. 32.

Um die nützliche Anwendung der Kräftepaare auf die einfache Beantwortung vorkommender technischer Fragen zu zeigen, lassen wir hier einige Aufgaben folgen.

Aufgabe 1. Ein gerader Stab (Stempel) *ab* Fig. 25. ist zwischen zwei Führungen (Scheidelatten) senkrecht auf und abwärts verschiebbar, am Ende *c* eines rechtwinkeligen Armes (Heblatte) *cd* wirkt vertikal aufwärts eine Kraft *P*; man soll die hierdurch in *e* und *f* erzeugten Normalpressungen angeben, wenn $cd = a$, $ef = l$ gegeben sind.

Fig. 25.



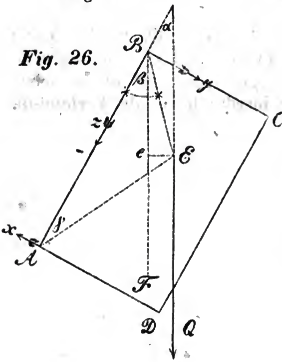
Auflösung. Aus §. 29. folgt hier unmittelbar, daß sich *P* in *c* ersetzen läßt durch $+P$ in der Richtung *ab* wirkend und durch ein Paar rechtwinklig auf *ab*, dessen Moment *Pa* ist. Bringt man letzteres auf die Breite *l*, so folgt für die gesuchten Normalpressungen

$$-P\frac{a}{l} \text{ in } e,$$

$$+P\frac{a}{l} \text{ in } f.$$

Aufgabe 2. Es sei *ABCD* Fig. 26. eine in vertikaler Ebene schief aufgehangene, um die Axe *AB* im Zapfen drehbare Klappe (Thür). In der Ebene derselben am Punkte *E* wirke vertikal abwärts eine Kraft *Q*; man soll die Pressungen angeben, welche die Punkte *A* und *B* erfahren.

Fig. 26.



Auflösung. Als bekannt setzen wir die in der Figur angegebenen Winkel α, β und γ voraus.

Man versetze *Q* parallel zu sich selbst nach dem Punkte *B*, so ergiebt sich eine Kraft $+Q$

in der Richtung von B nach F und ein Paar, dessen Moment ist: $Q.eE$.

Es ist aber $eE = AB.\frac{\sin\gamma.\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)}$, also auch

$$(1)\quad Q.eE = Q.AB.\frac{\sin\gamma.\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Um den Normaldruck $= x$ bei A zu finden, braucht man (1) nur auf die Breite AB zu bringen, so daß man erhält

$$x = Q\frac{\sin\gamma.\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Zugleich erhält man hierdurch einen eben so großen Druck bei B in der Richtung von B nach C. Zerlegt man daher $+Q$ in B in letztere Richtung und in die BA, so erhält man für den Gesammtdruck $= y$ in B, von B nach C

$y = Q\frac{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma)} + Q\sin\alpha$, oder, nach gehöriger Reduction,

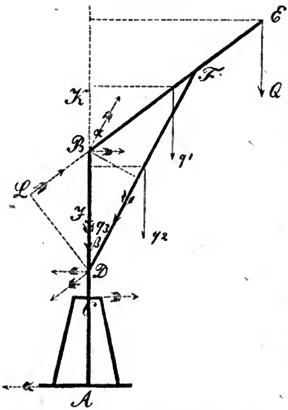
$y = Q\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\gamma+\beta)}$; so wie endlich für den Druck $= z$ in der Richtung von B nach A: $z = Q\cos\alpha$.

Beachtungswerth ist der besondere Fall, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma$ ist.

Aufgabe. 3. Es sei $ABEFD$ Fig. 27. eine Verbindung unbiegsamer Stäbe, deren vertikaler Theil AB bei C und A gehörig unterstützt ist (d. h. das Ganze sei das in einfachen Linien dargestellte Bild eines Krahnes).

Vertikal abwärts wirke bei E eine Kraft Q, in den Mitten von BE und DF eben so die Kräfte q_1 und q_2 und ferner in der Richtung BA bei J eine Kraft q_3; man soll die verschiedenen Pressungen angeben, welche hierdurch auf die Verbindung ausgeübt werden.

Fig. 27.



Auflösung. Man setze $BE = a$, $DF = b$, $DB = c$, $AC = d$, $BA = h$, ferner $\angle EBK = \alpha$ und $\angle BDF = \beta$. Versetzt man sämmtliche Kräfte parallel zu sich selbst in die Richtung BA, so erhält man für den Vertikaldruck $= R$ in A:

$$(1.)\ R = Q + q_1 + q_2 + q_3.$$

Gleichzeitig ergeben sich aber drei Paare, deren Momente sind:

$$Q . a \sin\alpha;\ q_1 . \frac{a}{2} \sin\alpha \text{ und } q_2 . \frac{b}{2} \sin\beta.$$

Nach §. 26. Nr. 3. erhält man für das Moment des resultirenden Paares $= G$ derselben:

$$(2)\ G = a \sin\alpha\,(Q + \frac{q_1}{2}) + q_2 . \frac{b}{2} \sin\beta.$$

Um jetzt die Pressungen an ganz beliebigen Punkten der Verbindung zu erhalten, wird man nur nöthig haben G auf entsprechende Breiten zu bringen.

So erhält man für die Horizontal-Pressungen in C und A: $\pm \frac{G}{d}$. Für eben diese Pressungen in B und D: $\pm \frac{G}{c}$. Ferner für die Pressung von B nach E, wenn man G auf die Breite $DL = c . \sin\alpha$ bringt: $\frac{G}{c \sin\alpha}$; so wie endlich für den Druck in der Richtung FD, weil hierzu G auf die Breite $BD . \sin\beta = c . \sin\beta$ zu bringen sein wird: $\frac{G}{c . \sin\beta}$.

Vom Principe der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 33.

Es sei A_1, A_2, A_3 … A_n Fig. 28. ein System unabänderlich mit einander verbundener Punkte, auf welche Kräfte P_1, P_2, P_3 … P_n wirken. Dieses System werde, ohne seinen Zusammenhang zu ändern, um einen unendlich kleinen Weg fortbewegt, so daß A_1 nach B_1, A_2 nach B_2 u. s. f. gelangt; fällt

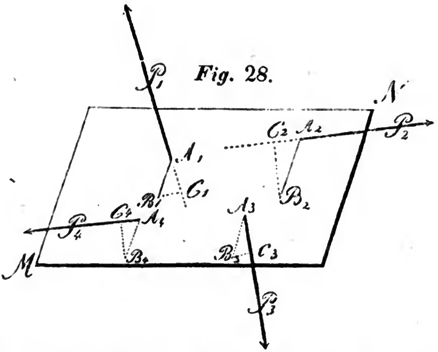


Fig. 28.

man dann von den Punkten B_1, B_2, B_3 .... auf die ursprünglichen Kraftrichtungen Normalen, so werden die dadurch erhaltenen Projectionen oder, was dasselbe ist, die cosinuirten Werthe der Wege auf die ersten Kraftrichtungen die Projections-Geschwindigkeiten oder virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte genannt.

Nimmt man nun an, daß das ganze System von Kräften sich im Gleichgewichte befindet, so ist natürlich die vorher bemerkte Bewegung nur eine gedachte, und die kleinen Wege müssen als die angesehen werden, welche jeder der Angriffspunkte im Sinne der auf ihn wirkenden Kraft durchlaufen haben würde, hätte eine unendlich kleine Bewegung stattfinden können. Im wahren Sinne des Wortes ist also nur von einem Bestreben nach Geschwindigkeit die Rede, oder von einer solchen Bewegung, die von jeder Kraft zwar angeregt, gleichsam beabsichtigt, aber wegen der entgegengesetzten Thätigkeit der übrigen Kräfte nicht zur Wirklichkeit gekommen ist.

Hierdurch erklärt es sich zugleich, weshalb man jene Projectionen nur die Größen des Strebens nach Geschwindigkeit oder die virtuellen Geschwindigkeiten nennt.

Bezeichnet man aber die den Kräften P_1, P_2, P_3 .... P_n zugehörigen virtuellen Geschwindigkeiten, d. i. $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, $A_3 C_3$ .... mit w_1, w_2, w_3 .... w_n, so kann man ganz allgemein für jede nur denkbare Art der erwähnten Bewegung die Gleichung nachweisen:

$$P_1 w_1 + P_2 w_2 + P_3 w_3 + \dots P_n w_n = 0.$$

Die Producte $P_1 w_1$ .... nennt man die virtuellen Momente, und der sich hieraus ergebende Satz läßt sich, wie folgt, ausdrücken:

Sind Kräfte, die beliebig auf ein System von Punkten wirken, unter einander im Gleichgewichte, so ist die algebraische Summe der ihnen entsprechenden virtuellen Momente gleich Null; oder: ist für jede denkbare unendlich kleine Bewegung des Systems die Summe der virtuellen Momente gleich Null, so findet auch Gleichgewicht oder Ruhe unter den Kräften Statt.

Dieses ausgesprochene Gesetz wird das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten genannt, und mit Hülfe desselben läßt sich jede Aufgabe der Statik lösen; es schließt daher solches die Sätze der früheren Paragraphen in sich.

Beweis des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn die gedachte Bewegung eine fortschreitende ist.

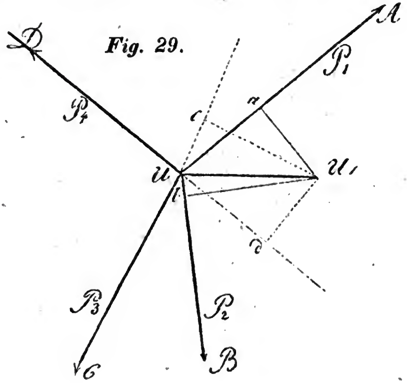
§. 34.

1) **Die Kräfte haben einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt.**

Es sei U Fig. 29. der Angriffspunkt der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, die außerdem in verschiedenen Ebenen liegen mögen.

Wird nun angenommen, daß der Angriffspunkt von U nach U_1 fotgerückt ist, die Kraftrichtungen aber dabei noch dieselben sind, so müssen $Ua = w_1$, $Ub = w_2$, $Uc = w_3$ u. s. f. die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P_1, P_2, P_3 .... P_n sein.

Fig. 29.



Sind ferner die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit der Verbindungslinie in UU_1 bilden, beziehlich α_1, α_2, α_3 .... α_n und ist $UU_1 = p$, so folgt

$$Ua = w_1 = p \cos \alpha_1, \quad Ub = w_2 = p \cos \alpha_2,$$
$$Uc = w_3 = p \cos \alpha_3 \text{ u. s. f.}$$

Zufolge §. 16. ist aber die Bedingungsgleichung, damit die gedachte fortschreitende Bewegung nach der Richtung UU_1 nicht stattfindet,

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \ldots . P_n \cos \alpha_n = 0;$$

oder, wenn man mit p multiplicirt,

$$P_1\, p \cos \alpha_1 + P_2\, p \cos \alpha_2 + P_3\, p \cos \alpha_3 \ldots . P_n\, p \cos \alpha^n = 0.$$

Hierein aber die vorstehenden Werthe gesetzt, giebt

$$P_1\, w_1 + P_2\, w_2 + P_3\, w_3 + \ldots . P_n\, w_n = 0,$$

wie behauptet wurde.

Daß übrigens dieser Beweis auch den Fall als besonderen mit einschließt, wo die Kraftrichtungen in einerlei Ebene liegen, ist leicht einzusehen.

2) Die Kräfte haben verschiedene Angriffspunkte.

Nimmt man an, daß alle Angriffspunkte um eine und dieselbe Größe p in irgend einer Richtung der drei Raum-Coordinaten-Axen, z. B. in der Richtung der Axe der ZZ, sich fortbewegt haben, so werden

$$p_1 \cos \gamma_1, \; p_2 \cos \gamma_2, \; p_3 \cos \gamma_3 \ldots . p_n \cos \gamma_n$$

sich als die virtuellen Geschwindigkeiten w_1, w_2, w_3 .... w_n der Angriffspunkte der beziehlichen Kräfte P_1, P_2, P_3 .... P_n nachweisen lassen, wenn γ_1, γ_2 .... γ_n die Neigungswinkel der beziehlichen Kräfte gegen die Axe ZZ bezeichnen. — Setzt man nun voraus, daß die Kräfte unter einander im Gleichgewichte stehen, so erhält man nach §. 30, damit die gedachte fortschreitende Bewegung nicht stattfindet, die Bedingungsgleichung

$$P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 \ldots . P_n \cos \gamma_n = 0.$$

Wird diese Gleichung mit p multiplicirt, so folgt

$$P_1\, p \cos \gamma_1 + P_2\, p \cos \gamma_2 + P_3\, p \cos \gamma_3 + \ldots . P_n\, p \cos \gamma_n = 0,$$

oder in Berücksichtigung der obigen Werthe für $p \cos \gamma$

$$P_1\, w_1 + P_2\, w_2 + P_3\, w_3 + \ldots . P_n\, w_n = 0.$$

Dieser Beweis schließt, ähnlich dem vorigen, den Fall ein, daß die Kraftrichtungen in einerlei Ebene liegen.

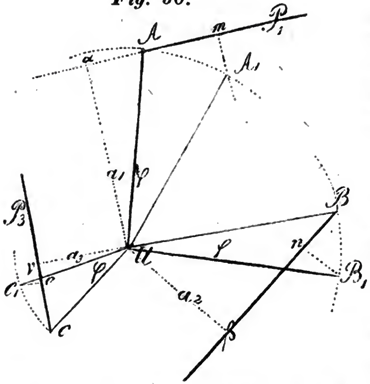
Uebrigens wird aus beiden jetzt abgehandelten Fällen zu entnehmen sein, daß das Princip auch dann noch gilt, wenn die Größe der gedachten Fortbewegung nicht blos unendlich klein, sondern eine beliebige ist.

Beweis des Principes, wenn die gedachte Bewegung eine drehende ist.

§. 35.

Es mögen P_1, P_2, $P_3 \ldots . P_n$ Kräfte sein, welche an den unbiegsamen Linien UA, UB, UC u. s. f., in einerlei Ebenen liegend, nach beliebigen Richtungen wirken.

Fig. 30.



Denkt man sich sodann, daß das ganze System um einen sehr kleinen Bogen φ für den Halbmesser $= 1$ gleichmäßig gedreht wurde, so müssen

$$AU . \varphi,\ BU . \varphi,\ CU . \varphi \text{ u. s. f.}$$

die Längen der von den Angriffspunkten beschriebenen Bögen, sowie

$$Am = w_1,\ Bn = w_2,\ An = w_3 \text{ u. s. f.}$$

die entsprechenden virtuellen Geschwindigkeiten sein.

Nimmt man nun wieder an, daß sich das System im Gleichgewichte befindet, so hat man nach 9. §. 18, damit die gedachte Bewegung nicht stattfindet, die Bedingungsgleichung

$$(1.)\ P_1\, a_1 + P_2\, a_2 + P_3\, a_3 + \ldots . P_n\, a_n = 0,$$

wo a_1, a_2, a_3, ... die Hebelarme der beziehlichen Kräfte bezeichnen. Da der Drehungswinkel sehr klein angenommen wurde, so kann man die einzelnen Bögen AA_1, BB_1, CC_1, u. s. f. ohne besonderen Fehler auch als gerade Linien ansehen und deshalb setzen:

$$\triangle\, AA_1\, m \backsim \triangle\, AU\alpha,$$
$$\triangle\, BB_1\, n \backsim \triangle\, BU\beta \text{ u. s. f.}$$

Dann verhält sich aber für P_1

$$AU : AU . \varphi = U\alpha : Am, \text{ d. i.}$$

$$1 : \varphi = a_1 : w_1,\ a_1 = \frac{w_1}{\varphi}.$$

Ebenso wird sein

$$a_2 = \frac{w_2}{\varphi},$$

$$a_3 = \frac{w_3}{\varphi} \text{ u. s. f.}$$

Werden aber diese Werthe in (1) gesetzt, so erhält man, nach entsprechender Multiplication mit φ,

$$P_1 w_1 + P_2 w_2 + P_3 w_3 + \ldots . P_n w_n = 0.$$

Liegen die Kräfte in verschiedenen Ebenen, so hat man für den Beweis nur nöthig, eine Ebene rechtwinkelig durch die Drehaxe zu legen, in diese Ebene die Kräfte der Angriffspunkte zu versetzen und jede Kraft in zwei andere zu zerlegen, wovon die eine rechtwinkelig gegen die Ebene gerichtet ist, die andere aber in der Ebene selbst liegt. Da sodann nur die Kräfte auf Drehung wirken können, welche in der Ebene liegen, so kann man die zur Drehaxe parallelen ganz außer Acht lassen, und der ganze Fall reducirt sich auf den zuletzt bewiesenen.

Der Cartesische Grundsatz.

§. 36.

Sind P_1, P_2, P_3 drei sich einander das Gleichgewicht haltende Kräfte, welche auf ein festes System von Punkten wirken, ferner für irgend eine fortschreitende oder drehende Bewegung w_1, w_2, w_3 beziehlich deren virtuelle Geschwindigkeiten, so hat man nach dem bereits Bewiesenen

$$P_1 w_1 + P_2 w_2 + P_3 w_3 = 0.$$

Wird aber eine der Kräfte z. B. $P_3 = 0$, vielleicht dadurch, daß, wie am Ende von §. 18, diese Kraft auf einen unverrückbaren Punkt wirkt, so verbleibt

$$P_1 w_1 + P_2 w_2 = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann stattfinden, wenn sie die Gestalt hat

$$\pm P_1 w_1 \mp P_2 w_2 = 0; \text{ oder auch}$$
$$P_1 w_1 = P_2 w_2 \text{ ist.}$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich endlich die Proportion

$$P : P_2 = w_2 : w_1 \text{ ; d. h.}$$

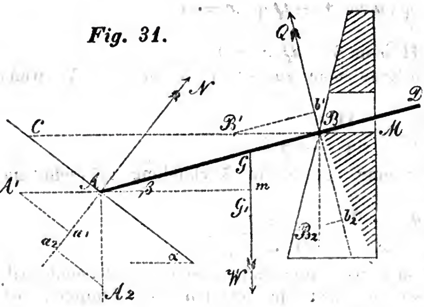
sind zwei Kräfte mittels eines festen Widerstandes mit einander im Gleichgewichte, so verhalten sich dieselben umgekehrt wie die auf ihre Richtungen genommenen virtuellen Geschwindigkeiten.

Dieser Satz, welcher sonach nichts Anderes als ein specieller Fall des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist, wurde zuerst von Cartesius aufgestellt.

§. 37.

Für die Anwendung des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten diene nachstehende Aufgabe.

Fig. 31.



Ein unbiegsamer Stab AD Fig. 31. ist durch die Oeffnung (Loch) M einer Mauer gesteckt, wodurch derselbe am Ausweichen zur Seite verhindert wird. Bei B liegt derselbe auf und mit dem Ende A stützt er sich gegen eine feste Fläche AC, die mit dem Horizonte einen Winkel α bildet. Die Horizontalentfernung BC ist bekannt und gleich l. In G, von A um $AG = a$ entfernt, wirkt auf den Stab in vertikaler Richtung eine Kraft W; man soll für den Gleichgewichtszustand die Lage des Stabes bestimmen?

Auflösung. Wir setzen die unbekannten Normaldrücke (Gegendrücke §. 31) in A und B respective N und Q, den Neigungswinkel des Stabes gegen den Horizont $= \beta$ und die ebenfalls nicht bekannte Entfernung $AB = x$. Sämmtliche Kräfte dürfen wir als in einerlei Ebene wirkend annehmen.

Denken wir uns dann zuerst eine Horizontalverschiebung des ganzen Systemes um den beliebigen Weg $= w = AA_1 = BB_1$, so sind Aa' und Bb' die entsprechenden virtuellen Geschwindigkeiten von N und Q (W hat keine solche, da die Verschiebung normal gegen deren Richtung ist). Man erhält folglich

$N . Aa' - Q . Bb' = 0$; d. i. wegen $Aa' = AA' \sin\alpha$, $Bb' = BB' \sin\beta$:

$$(1)\quad N . \sin\alpha - Q \sin\beta = 0.$$

Eben so denken wir uns eine Vertikalverschiebung um den gleichen Weg: $AA_2 = GG_1 = BB_2$, wodurch sich für N, W und Q respect. die virtuellen Geschwindigkeiten Aa_2, GG_1, Bb_2 ergeben und somit

$W . GG_1 - N . Aa_2 - Q . Bb_2 = 0$; oder auch

$W . GG_1 - N . AA_2 \cos\alpha - Q . BB_2 . \cos\beta = 0$, d. i.

$$(2)\quad W - N \cos\alpha - Q \cos\beta = 0.$$

Für die Bedingung des vollständigen Gleichgewichtes ist jetzt noch die Gleichung gegen Drehbewegung zu bilden.

Hierzu wählen wir A als Momentenpunkt, wonach $Am = a \cos\beta$ der Hebelarm von W, $AB = x$ der von Q wird. Diese nach §. 35. mit dem unendlich kleinen Drehbogen $= \varphi$ multiplicirt, giebt überhaupt

$$W \cdot \varphi \cdot a \cos\beta - Q\varphi \cdot x = 0\ ^{*)}.$$

Hieraus aber

$$(3)\quad W a \sin\beta - Q x = 0.$$

Nunmehr entferne man zuerst aus (1) und (2) N, wonach folgt

$$(4)\quad Q = \frac{W \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Letztere Gleichung mit (3) in Verbindung gebracht, giebt sodann

$$(5)\quad \frac{a \cdot \cos\beta}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Hier finden sich zwei unbekannte Größen in derselben Gleichung, weshalb wir aus den angegebenen Bezeichnungen, nach trig. Sätzen, noch entnehmen

$x : l = \sin\alpha : \sin(\alpha + \beta)$. Reducirt man hieraus x und setzt diesen Werth in (5), so erhält man

$\cos\beta \sin(\alpha + \beta)^2 = \frac{l}{a} \sin\alpha^2$, woraus β berechnet werden kann und worauf auch x, Q und N zu bestimmen sind. Für $\alpha = 90^0$ folgt

$$\cos\beta = \sqrt[3]{\frac{l}{a}} \text{ etc.}$$

Zweites Kapitel.

Vom Schwerpunkte.

§. 38.

Die Eigenschaft aller irdischen Körper, vermöge welcher sie, sich selbst überlassen, gegen den Mittelpunkt der Erde hin zu fallen bestreben, nennt man Schwere. Als Ursache dieser Erscheinung sieht man die Schwerkraft, d. i. den unserer Erde zukommenden Theil der allgemeinen Anziehung, Gravitation, an, die zwischen allen Weltkörpern, ja zwischen allen Punkten der wahrnehmbaren Materie stattfindet, und die im geraden Verhältnisse der Masse des anziehenden Körpers und im umgekehrten mit dem Quadrate der Entfernung des angezogenen Körpers steht.

*) Man erkennt leicht, daß es in ähnlichen Fällen jedenfalls einfacher sein wird, ohne Rücksicht auf den Drehbogen, die statische Momentengleichung direkt zu bilden.

§. 39.

Hängt man einen Körper an einem vollkommen biegsamen und oben befestigten Faden auf, so zeigt die Richtung, nach welcher er den Faden spannt, die der Schwerkraft an, und man nennt diese Richtung senkrecht, lothrecht oder vertikal.

Von einer Linie oder Ebene, sagt man, sie ist horizontal, wenn sie eine lothrechte Linie rechtwinkelig durchschneidet.

Die verlängerten Richtungen der Schwerkraft an den verschiedenen Orten der Erde müssen, da letztere fast eine kugelförmige Gestalt hat (der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Durchmesser beträgt nur $\frac{1}{289,1}$) in dem Mittelpunkte derselben zusammentreffen. Berücksichtigt man jedoch die Größe eines Erdhalbmessers, die zu 859,417 geographischen Meilen, die Meile = 7421,34 Meter gesetzt, angenommen werden kann, im Verhältniß zu den Ausdehnungen der Körper, die man gewöhnlich betrachtet, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Richtungen der Schwerkraft für die Theile eines und desselben Körpers parallel sind.

§. 40.

Wird ein Körper durch eine horizontale Unterlage, oder wie vorher bemerkt, durch Aufhängen an einem Faden, am wirklichen Fallen gehindert, so übt er gegen die Unterlage einen (normalen) Druck, gegen den Faden und dessen Befestigungspunkt einen Zug aus, welchen man (Druck oder Zug) das (absolute) Gewicht des Körpers nennt.

Im gemeinen Leben bestimmt man das Gewicht der Körper dadurch, daß man ein bestimmtes Gewicht zur Einheit annimmt und durch Abwägen findet, wie vielmal diese Einheit in dem abzuwägenden Körper enthalten ist.

Wir nehmen hier das Gewicht eines Kubikdecimeters destillirten Wassers bei einer Temperatur von 4 Grad des hunderttheiligen Thermometers zur Einheit an und nennen dasselbe Kilogramm.

Zusatz. Aus dem Vorstehenden erhellt zugleich, wie man die Schwerkraft zur Vergleichung (als Maß) mit anderen beliebig wirkenden Kräften benutzen kann. Denn denkt man sich eine beliebige Kraft an irgend einem Punkte eines festen Hindernisses angreifend, so ruft sie in letzterem (nach §. 31) einen gewissen Gegendruck hervor. Entfernt man die Kraft und hängt an gedachtem Punkte mittels eines (dünnen) Fadens ein Gewicht auf, welches genau denselben Gegendruck erzeugt, so kann letzteres offenbar als Maß der ersteren Kraft betrachtet werden *). Auch hierbei nehmen wir das

*) Die praktische Technik benutzt zum Messen der Kräfte Gewichts- oder Federwagen. Ausführlicheres über das Maß der Kräfte wird die Geodynamik enthalten.

Kilogramm zur Maßeinheit an, so daß unter einer Kraft, deren Intensität durch n Kilogramme ausgedrückt wird, eine solche zu verstehen ist, welche einem Gewichte von n Kilogrammen das Gleichgewicht hält.

§. 41.

Jeder Körper von solcher Beschaffenheit, daß gleiche Volumentheile gleiches Gewicht besitzen, wird ein gleichartiger (homogener), im Gegentheile ein ungleichartiger genannt. In dem Folgenden setzen wir immer gleichartige Körper voraus, sobald das Gegentheil nicht besonders angegeben wird.

Das Gewicht der Volumen- oder Cubik-Einheit eines Körpers nennen wir dessen Dichte.

Bezeichnet daher P das Gewicht irgend eines Körpers, V und D respective Volumen und Dichte desselben, so erhält man unmittelbar

$$(1)\quad P = D \,.\, V.$$

Für einen zweiten Körper, wobei die genannten Größen verschieden von den vorbemerkten, jedoch respective durch P', D' und V' ausgedrückt sind, folgt eben so $P' = D'\, V'$.

Man kann daher auch die Proportion bilden

$$P : P' = DV : D'V'.$$

Ist sodann $D = D'$, so folgt

$$P : P' = V : V', \text{ d. h.}$$

bei Körpern von gleicher Dichte verhalten sich die Gewichte wie die respectiven Volumen.

§. 42.

In wie viel Theilchen auch ein Körper zerlegt werden mag, immer wird man die Gewichte derselben als vertikal abwärts wirkende und unter einander parallel gerichtete Kräfte ansehen können. Da ferner ein jeder Körper als ein System unveränderlich verbundener, nur sehr nahe liegender materieller Punkte angesehen werden kann, so folgt, daß hier alles Das in Anwendung zu bringen ist, was §. 20. in Bezug auf parallele Kräfte gefunden wurde, und man kann deshalb auch nach dem Angriffspunkte der Mittelkraft aller parallelen Kräfte oder nach dem Mittelpunkte derselben fragen.

Dieser Punkt in jedem Körper heißt der Schwerpunkt desselben; er ist also auch derjenige, in welchem man sich das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, oder der unterstützt oder festgehalten werden muß, soll der Körper bei jeder ihm gegebenen Lage in Ruhe bleiben.

Jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt eines

Körpers hindurchgeht, wird Schwerlinie und jede ebenso durchgehende Ebene eine Schwerebene des Körpers genannt.

Hieraus folgt zugleich, daß der Schwerpunkt durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien oder einer Schwerlinie mit einer Schwerebene oder auch durch den Durchschnitt dreier Schwerebenen bestimmt werden muß.

Bringt man daher einen Körper über einer scharfen Kante in's Gleichgewicht, so ist die durch diese Kante gelegte Vertikalebene eine Schwerebene des Körpers, und wenn man ihn an einen Faden aufhängt, so ist bei völliger Ruhe die Richtung des Fadens eine Schwerlinie. Mit Hülfe solcher Versuche läßt sich der Schwerpunkt eines Körpers empirisch bestimmen.

Um die Lage des Schwerpunktes eines Körpers durch Rechnung zu finden, benutze man die Gleichungen II. §. 20. und berücksichtige dabei, daß die dortigen parallelen Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ als Gewicht anzusehen sind, diese aber nach §. 41. durch die beziehlichen Volumen V_1, V_2, $V_3 \ldots V_n$ ersetzt werden können. Sind dann die Coordinaten des Schwerpunktes x, y und z, die der Volumnina der einzelnen körperlichen Elemente x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s. f., so erhält man:

$$x = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3 + \ldots V_n x_n}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots V_n};$$

$$y = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + V_3 y_3 + \ldots V_n y_n}{V_1 + V_2 + V_3 \ldots V_n};$$

$$z = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3 \ldots V_n z_n}{V_1 + V_2 + V_3 \ldots V_n}.$$

Man findet demnach die Entfernung des Schwerpunktes von drei auf einander rechtwinkeligen Coordinaten-Ebenen, wenn man die statischen Momente der einzelnen Elemente durch die Summe dieser Elemente dividirt.

Da man sich dünne Dräthe als Linien und dünne Bleche als Flächen denken kann, so kann man auch nach dem Schwerpunkte materieller Linien und Flächen fragen. Deshalb sollen in den folgenden §§ bestimmt werden:

1) die Schwerpunkte der Linien,
2) die Schwerpunkte der Flächen und
3) die Schwerpunkte der Körper.

Schwerpunkte der Linien.

§. 43.

Der Schwerpunkt einer materiellen, homogenen geraden Linie liegt in der Mitte derselben. Denn denkt man sich die ganze Linie in unendlich viele Elemente zerlegt und unterstützt

sie in ihrer Mitte, so hat man zu beiden Seiten derselben gleiche statische Momente; giebt man ihr ferner die vertikale Richtung, so zieht das ganze Gewicht in dieser Richtung nieder, so daß der Angriffspunkt der Mittelkraft aller Elementargewichte von beiden Enden der Linie gleichweit absteht und zugleich innerhalb derselben liegt.

§. 44.

Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Der materielle, homogene Kreisbogen ***ADB*** Fig. 32, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, werde in zwei gleiche Theile $AD = DB$ getheilt und aus *C*, dem Mittelpunkte des zugehörigen Kreises, die Gerade ***CD*** gezogen, so ist diese nach dem Vorhergehenden eine Schwerlinie. Um den Ort des Schwerpunktes in der Schwerlinie zu finden, nehme man eine feste, durch *C* gehende Gerade XX', welche zugleich parallel zur Sehne ***AB*** des Bogens ist, zur Momentenaxe an und theile den Kreisbogen in so kleine Theile ***GH***, daß jeder derselben ohne merklichen Fehler als gerade Linie angesehen werden kann, deren Mittelpunkte, wie *F*, sodann Schwerpunkte sein müssen.

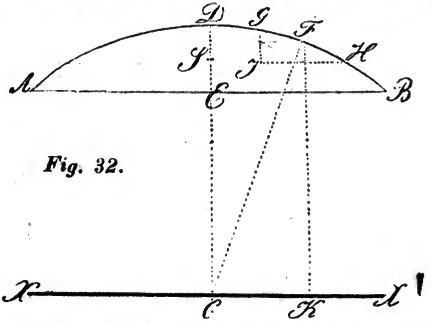


Fig. 32.

Fällt man von dem Mittelpunkte *F* des Elementes ***GH*** auf XX' die Normale ***FK***, so ist diese der Hebelarm des Elementes, und demnach sein Moment

(1.) $GH.\,FK$.

In den ähnlichen Dreiecken ***CKF*** und ***GHI*** verhält sich aber:

$GH : IH = CF : FK$, deshalb ist auch das Moment des Bogenelementes wegen (1.) $GH.\,FK = IH.\,CF$. Da aber ***IH*** als Element der Sehne ***AB*** betrachtet werden kann, so erkennt man leicht, wie die Momente aller übrigen Elemente gefunden werden, deren Summe aber dem Momente des ganzen

Bogens, bezogen auf die Entfernung *CS* des Schwerpunktes vom Mittelpunkte *C*, gleich sein muß. Wird daher die Länge des ganzen Bogens *AB* mit *s* bezeichnet, die der Sehne *AB* mit *a*, der Radius *CF* mit *r* und die Entfernung *CS* mit *x*, so folgt:

$$sx = ar \quad \text{und}$$

$$\text{I.,} \quad x = \frac{ar}{s}.$$

Wird ferner der halbe Centriwinkel, d. h. $\angle DCB$ in Bogenmaß für den Radius $= 1$, mit α bezeichnet, so ist:

$$s = 2\alpha r, \quad \text{und}$$
$$a = 2r \sin \alpha;$$

demnach erhält man auch, wenn diese Werthe in I. gesetzt werden

$$\text{II.,} \quad x = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Für den Bogen des Halbkreises ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi, \ \sin \alpha = 1, \quad \text{demnach}$$

$$\text{III.,} \quad x = \frac{2r}{\pi} = 0{,}63662 \ldots\ldots r,$$

d. i. ungefähr $\frac{7}{11} r$.

Endlich ist für den Bogen des ganzen Kreises

$$\alpha = \pi, \ \sin \alpha = 0 \quad \text{und}$$

$$x = r\frac{0}{\pi} = 0; \ \text{wie ganz natürlich.}$$

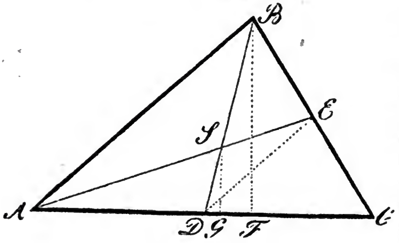
Schwerpunkte ebener Flächen.

§. 45.

Schwerpunkt eines ebenen Dreiecks.

Ist *ABC* Fig. 33. ein ebenes, materielles und homogenes Dreieck, so müssen die Linien *AE* und *BD*, welche von der Mitte der Seiten *BC* und *AC* nach den gegenüber liegenden Winkelpunkten gezogen wurden, Schwerlinien der Dreieckfläche sein, indem sich nämlich zeigen läßt, daß zu beiden Seiten jeder der gezogenen Linien gleiche Momente liegen.

Fig. 33.



Nach dem Vorhergehenden liegt aber der Schwerpunkt im Durchschnitte zweier Schwerlinien, so daß S der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks sein muß.

Verbindet man D mit E, so ist $DE \parallel AB$ und $\triangle ABS \backsim \triangle DSE$ ferner ist auch $DE = \frac{1}{2} AB$, daher erhält man

$$BS : SD = AB : DE = 2 : 1 ;$$
$$BS + SD : SD = 2 + 1 : 1 ;$$
$$BD : SD = 3 : 1, \text{ und}$$
$$SD = \tfrac{1}{3} BD.$$

Der Schwerpunkt einer jeden Dreieckfläche liegt also in der Schwerlinie um $\frac{1}{3}$ von der Grundlinie entfernt.

Fällt man von B und S aus Normalen auf AC, so folgt, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke DBF und DSG, daß $SG = \frac{1}{3} BF$ ist, oder, der rechtwinkelige Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie ist gleich dem dritten Theile der rechtwinkeligen Höhe des Dreiecks.

§. 46.

Schwerpunkt eines Parallelogrammes.

Die beiden Diagonalen eines Parallelogrammes müssen Schwerlinien sein, da sich zu beiden Seiten jeder derselben gleiche Momente nachweisen lassen. Der Schwerpunkt eines jeden Parallelogrammes liegt mithin im Durchschnittspunkte seiner beiden Diagonalen.

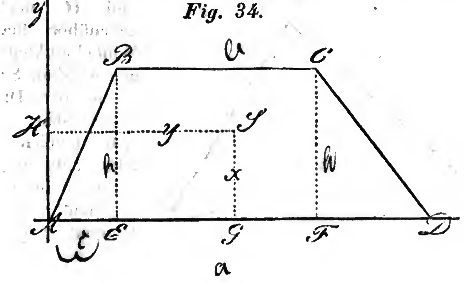
§. 47.

Schwerpunkt eines Paralleltrapezes.

Es sei $ABCD$ das angegebene Paralleltrapez und dabei $AD = a$, $BC = b$, $BE = CF = h$ und $AE = c$; ferner sei der Abstand des Schwerpunktes S der Figur, von AD aus gerechnet, $SG = x$ und von der auf AD rechtwinkeligen Linie AY aus, $SH = y$.

In Bezug auf AD ist das Moment des Parallelogrammes $BEFC$

Fig. 34.



$$(1.)\ \tfrac{1}{2}h.\ bh;$$

ebenso die Summe der Momente der beiden Dreiecke *ABE* und *CFD*

$$(2.)\ \tfrac{1}{3}h.\ \tfrac{1}{2}c.h. + \tfrac{1}{3}h.\ \tfrac{1}{2}h(a-b-c)$$

daher, wenn man (1.) und (2.) addirt und die Summe durch den Inhalt des Trapezes, d. i. durch $\frac{1}{2}h(a+b)$ dividirt,

$$x = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + \frac{1}{6}ch^2 + \frac{1}{6}ah^2 - \frac{1}{6}bh^2 - \frac{1}{6}ch^2}{\frac{1}{2}h(a+b)}\ \text{d. i.}$$

$$\text{I.,}\quad x = \tfrac{1}{3}h\,\frac{a+2b}{a+b}.$$

In Bezug auf die Normale *Ay* ist das Moment des Parallelogramms *BECF*

$$(3.)\ (c+\tfrac{1}{2}b).\ bh;$$

die Summe der Momente der Dreiecke *ABE* und *FCD*

$$(4.)\ \tfrac{2}{3}c\,\frac{ch}{2} + \left\{c+b+\tfrac{1}{3}(a-b-c\right\}.\tfrac{1}{2}h(a-b-c);$$

demnach

$$y = \frac{(c+\frac{1}{2}b).bh + \frac{1}{3}c^2h + \frac{1}{2}h(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c)(a-b-c)}{\frac{1}{2}h(a+b)};$$

$$y = \frac{\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}b^2 + \frac{1}{6}ab + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{3}bc}{\frac{1}{2}h(a+b)};$$

$$\text{II.,}\quad y = \frac{a^2+b^2+a(b+c)+2bc}{3(a+b)}.$$

Ist *BAD* ein rechter Winkel, so wird $c=0$, und sodann ist

$$\text{III.,}\quad y = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}.$$

§. 48.

Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks.

Man zerlege das Vieleck in Dreiecke oder Paralleltrapeze und finde die Inhalte und Schwerpunkte jedes derselben; man nehme sodann in der Ebene der Figur, und zwar in der Nähe derselben, zwei sich rechtwinkelig schneidende Coordinaten-Axen an, beziehe die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke oder Trapeze auf diese Axen und bestimme mit Hülfe der zwei ersten Gleichungen §. 42. die Abstände des Schwerpunktes des Vielecks von den beiden Axen.

§. 49.

Schwerpunkte von Theilen der Kreisfläche.

1. Schwerpunkt eines Kreisausschnittes.

Zerlegt man den Kreisausschnitt in so kleine Theile, daß ein jeder als Dreieck angesehen werden kann, so müssen die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke um $\frac{2}{3}$ des Halbmessers von dem Kreismittelpunkte entfernt sein. Hiernach kann man sich aber statt des Kreisausschnittes einen materiellen Kreisbogen mit demselben Centriwinkel 2α wie in §. 44. denken, dessen Halbmesser jedoch $\frac{2}{3}r$ ist. Die Entfernung des Ausschnittschwerpunktes vom Kreismittelpunkte ist demnach zufolge I. und II. §. 44.

$$\text{I.}\quad x = \frac{2}{3}\frac{ar}{s},\ \text{oder}$$

$$\text{II.}\quad x = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für die halbe Kreisfläche ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, demnach

$$\text{III.}\quad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

2. Schwerpunkt eines concentrischen Kreis-Ringstückes.

Bezeichnet man die Halbmesser der beiden Begrenzungsbogen respective mit R und r, den gemeinschaftlichen Centriwinkel wie vorher mit 2α (ebenfalls in Bogenmaß für den Halbmesser $= 1$), so erhält man für die Momente, eines jeden zuerst für sich gedachten Kreisausschnittes, respective

$$\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\alpha\,.\,R^2 = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha,\ \text{und}$$

$$\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}\times\alpha\,.\,r^2 = \frac{2}{3}r^3\sin\alpha.$$

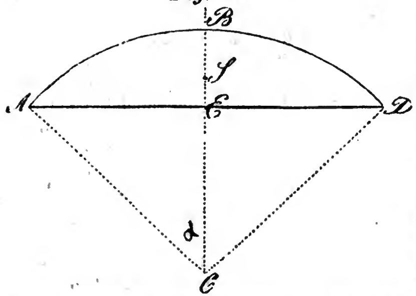
Die Differenz dieser Momente muß aber dem Momente des Ringstückes gleich sein, dessen Flächeninhalt $\alpha(R^2 - r^2)$ ist. Bezeichnet daher x den Schwerpunktsabstand des letzteren, vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises aus gerechnet, so folgt

$$x\,.\,\alpha(R^2 - r^2) = \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha,\ \text{d. i.}$$

$$\text{IV.}\quad x = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

3. Schwerpunkt eines Kreisabschnittes.

Fig. 35.



Hierzu benutze man den Satz, daß das Moment des Ausschnittes *ABCD* Fig. 35, aus der Summe der Momente des Abschnittes *ABDE* und des Dreieckes *ADC* bestehen muß, wenn sämmtliche Momente auf den Kreismittelpunkt *C* bezogen werden.

Der zu bestimmende Schwerpunkt liege in *S*.

Es ist nun das Moment des Ausschnittes, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden,

$$\tfrac{2}{3}\cdot\frac{ar}{s}\cdot\frac{sr}{2}=\tfrac{1}{3}\,ar^2;$$

das Moment des Dreiecks nach §. 45.

$$\tfrac{2}{3}\,EC\times\frac{a\,.\,EC}{2}=\tfrac{1}{3}\,a\,.\,\overline{EC}^2.$$

Bezeichnet man daher den Inhalt des Segmentes mit *A* und setzt $CS=x$, so folgt

$$\tfrac{1}{3}\,ar^2=x\,.\,A+\tfrac{1}{3}\,a\,.\,\overline{EC}^2.$$

Im rechtwinkeligen Dreiecke *AEC*, ist aber $\overline{EC}^2=r^2-\tfrac{1}{4}\,a^2$, demnach wird

$$\tfrac{1}{3}\,ar^2=x\,.\,A+\tfrac{1}{3}\,ar^2-\tfrac{1}{12}\,a^3 \text{ und sonach}$$

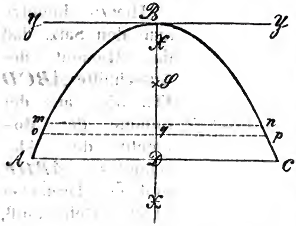
$$\text{V.}\quad x=\frac{a^3}{12A}.$$

§. 50.

Schwerpunkt der Fläche einer gemeinen Parabel.

Es sei *ABC* Fig. 36. die gedachte materielle Parabelfläche, *XX* als Axe einer Schwerlinie derselben und *YY* in *B* normal

Fig. 36.



auf XX. Ferner sei AC parallel zu YY und $= a$, $BD = b$. Der zu suchende Schwerpunkt liege in S. In der Entfernung $Bq = x$ ziehe man parallel zu YY zwei Sehnen mn und op, die um die unendlich kleine Größe $= \delta$ von einander abstehen, so daß der Inhalt von $mnop$ als Rectangel betrachtet werden darf. Setzt man daher $mn = op = 2y$, so ist gedachter Inhalt: $2y \, . \, \delta$ und sein Moment in Bezug auf YY: $2y\delta \, . \, x$.

Von letzterer Form werden aber die Momente aller Flächen-Elemente sein, welche man auf ähnliche Weise zwischen q und B bildet, so daß für das Moment $= M$ des Flächenstückes oBp gesetzt werden kann

$$(1.) \quad M = \Sigma\,(2\,y \, . \, \delta \, . \, x) = 2\,\delta\,\Sigma\,(xy).$$

Für die gemeine Parabel, deren Parameter $= p$ ist, erhält man nach geometrischen Sätzen $y^2 = px$ und $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, weshalb statt (1) zu schreiben ist

$$(2.) \quad M = 2\,p^{\frac{1}{2}} \, . \, \delta\,\Sigma\,(x^{\frac{3}{2}}).$$

Denkt man sich jetzt qB in unendlich viel Theile jeden $= \delta$ getheilt, setzt in (2.) für x auf einander folgend δ, $2\,\delta$, $3\,\delta \ldots . \, n\delta$, und addirt die erhaltenen Werthe, so erhält man:

$$M = 2 \, . \, p^{\frac{1}{2}}\,\delta^{\frac{5}{2}}\,(1 + 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{3}{2}} \ldots .),$$

und wenn die Zahl der in der Parenthese enthaltenen Glieder unendlich groß gedacht wird, ferner n eine unendlich große Zahl ausdrückt, so ist die Summe der gedachten Glieder $= \frac{2}{5} \, . \, n^{\frac{5}{2}}$ *), daher

$$M = \tfrac{4}{5}\,p^{\frac{1}{2}} \, . \, (n\delta)^{\frac{5}{2}}, \text{ und wegen } n\delta = x, \text{ folgt}$$

$$(3.) \quad M = \tfrac{4}{5}\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{5}{2}}.$$

Der Inhalt der Fläche oBp ist ferner $\frac{4}{3}\,xy = \frac{4}{3}\,p^{\frac{1}{2}} \, . \, x^{\frac{3}{2}}$, daher auch, wenn z den Schwerpunktsabstand derselben von YY bezeichnet, mit Bezug auf (3.)

$$z \, . \, \tfrac{4}{3}\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{4}{5}\,p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{5}{2}}, \text{ d. i.}$$

$$z = \tfrac{3}{5}\,x.$$

Für die ganze Parabelfläche ABC wird $x = BD = b$, $z = BS$, demnach

$$\text{I.} \quad BS = \tfrac{3}{5} \, . \, \overline{BD} = \tfrac{3}{5}\,b, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad DS = \tfrac{2}{5} \, . \, \overline{BD} = \tfrac{2}{5}\,b.$$

---

*) Man sehe hierüber die Anmerkung zu diesem §.

Anmerkung. Beweis, daß die Summenformel für die m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlenreihe allgemein

$$\Sigma (n)^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$ ist, sobald n unendlich groß vorausgesetzt wird, m aber eine ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl bezeichnet.

Nach dem binomischen Lehrsatze kann man schreiben

$$\begin{array}{lllll} & (\alpha) & (\beta) & & \\ (0+1)^2 = 1 & = . & . & & +1 \\ (1+1)^2 = 2^2 & = 1 & +2.1 & & +1 \\ (2+1)^2 = 3^2 & = 2^2 & +2.2 & & +1 \\ (3+1)^2 = 4^2 & = 3^2 & +2.3 & & +1 \\ (4+1)^2 = 5^2 & = 4^2 & +2.4 & & +1 \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

$$\{(n-1)+1\}^2 = n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

$$\{(n+0)+1\}^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Addirt man jetzt die in einerlei Vertikalreihe befindlichen Werthe, bildet aus den Summen eine Gleichung und hebt die gleichen Glieder aus der Reihe (α) gegen die entsprechenden Glieder der Reihe (β) auf, so ergiebt sich endlich

$$(n+1)^2 = 2\,\Sigma(n) + (n+1).$$

Diese Gleichung durch n^2 dividirt, folgt

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2\,\Sigma(n)}{n^2} + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

und $n = \infty$ gesetzt, ergiebt sich hieraus

$$1 = \frac{2\,\Sigma(n)}{n^2}, \text{ d. i.}$$

$$(1)\ \Sigma(n) = \frac{n^2}{2}.$$

Nach demselben Verfahren bilde man folgende Werthe

$$\begin{array}{llllll} (0+1)^3 = 1 & = . & . & . & +1 \\ (1+1)^3 = 2^3 & = 1 & +3.1 & +3.1 & +1 \\ (2+1)^3 = 3^3 & = 2^3 & +3.2^2 & +3.2 & +1 \\ (3+1)^3 = 4^3 & = 3^3 & +3.3^2 & +3.3 & +1 \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

$$\{(n-1)+1\}^3 = n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$\{(n+0)+1\}^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Hieraus aber wie bei der vorigen Entwickelung

$$(n+1)^3 = 3\,\Sigma(n)^2 + 3\,\Sigma(n) + (n+1).$$

Diese Gleichung durch n^3 dividirt, giebt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = 3\,\frac{\Sigma(n)^2}{n^3} + \frac{3}{n} \cdot \frac{\Sigma(n)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$ oder mit Bezug auf (1)

$$(1+\frac{1}{n})^3 = 3\,\frac{\Sigma\,(n)^2}{n^3} + \tfrac{3}{2}\,.\,\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\,(1+\frac{1}{n}).$$

Hieraus aber für $n = \infty$,

$$1 = 3\,\frac{\Sigma\,(n)^2}{n^3},\ \text{d. i.}$$

$$\Sigma\,(n)^2 = \frac{n^3}{3}.$$

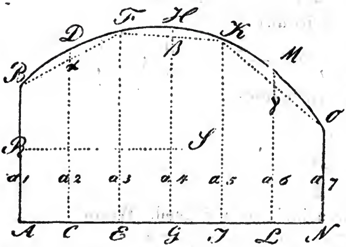
Auf ähnliche Weise läßt sich $\Sigma\,(n)^3 = \frac{1}{4}\,n^4$, $\Sigma\,(n)^4 = \frac{1}{5}\,n^5$ u. s. f. endlich I. $\Sigma\,(n)^m = \dfrac{n^{m+1}}{m+1}$ finden.

Beachtet man nun, daß sich der ganze Beweis auf den binomischen Lehrsatz stützt, dieser für ganze, gebrochene, positive und negative Exponenten derselbe ist, so folgt, daß auch I. in solcher Allgemeinheit gültig sein muß.

§. 51.

Schwerpunkt einer jeden von einer beliebigen krummen Linie begränzten Fläche.

Fig. 37.



Es sei ***ABON*** Fig. 37. die gegebene Fläche und es werde zuerst der Abstand des Schwerpunktes ***RS*** $= y$ von der Linie ***AB*** gesucht, welche auf ***AN*** senkrecht und mit ***ON*** parallel ist.

Um diese Aufgabe möglichst einfach zu lösen, benutze man die Simpson'sche Regel für die Berechnung beliebiger krummliniger ebener Flächen*) und theile deshalb ***AN*** in eine gerade Anzahl beliebig großer, aber gleicher Theile, wovon die Länge eines jeden $= b$ sein mag, errichte in den Theilpunkten Ordinaten und bezeichne deren Längen mit $a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots .\ a_n$.

Sodann ist aber, für beispielsweise sechs gleiche Theile, also sieben Ordinaten

Inhalt der Fläche ***ABDFE*** $= \frac{1}{3}\,b\,(a_1 + 4\,a_2 + a_3)$;

» » » ***EFHKI*** $= \frac{1}{3}\,b\,(a_3 + 4\,a_4 + a_5)$;

» » » ***IKMON*** $= \frac{1}{3}\,b\,(a_5 + 4\,a_6 + a_7)$.

Zieht man ferner die Sehnen

BF, ***FK*** und ***KO***, so ist

*) Man sehe die folgende Anmerkung.

Inhalt des Trapezes $ABFE = b\,(a_1 + a_3)$;
» » » $EFKI = b\,(a_3 + a_5)$;
» » » $IKON = b\,(a_5 + a_7)$;
ebenso nach gehöriger Subtraction
Inhalt des Segmentes $BDF\alpha = \frac{2}{3}\,b\,(2\,a_2 - a_1 - a_3)$;
» » » $FHK\beta = \frac{2}{3}\,b\,(2\,a_4 - a_3 - a_5)$;
» » » $KMO\gamma = \frac{2}{3}\,b\,(2\,a_6 - a_5 - a_7)$.

Die Schwerpunkts-Entfernungen der Trapeze auf AB bezogen, erhält man nach I., §. 47, wie folgt

Für das Trapez $ABFE: \frac{2}{3}\,b\left(\frac{a_1 + 2\,a_3}{a_1 + a_3}\right)$;

» » » $EFKI: 2b + \frac{2}{3}\,b\left(\frac{a_3 + 2\,a_5}{a_3 + a_5}\right)$;

» » » $IKON: 4\,b + \frac{2}{3}\,b\left(\frac{a_5 + 2\,a_7}{a_5 + a_7}\right)$.

Werden die Schwerpunkte der Segmente in den Geraden a_2, a_4, a_6 angenommen, welche deren Flächen halbiren, so ergeben sich die Entfernungen derselben von AB wie nachstehend.

Für das Segment $BDF\alpha : b$;
» » » $FHK\beta : 3\,b$;
» » » $KMO\gamma : 5\,b$.

Hieraus erhält man aber:

Moment des Trapezes $ABFE : b\,(a_1 + a_3) \times \frac{2}{3}\,b\left(\frac{a_1 + 2\,a_3}{a_1 + a_3}\right) =$
$= \frac{2}{3}\,b^2\,(a_1 + 2\,a_3)$;

» » » $EFKI: b\,(a_3 + a_5) \times \left(2b + \frac{2}{3}\,b\,\frac{a_3 + 2a_5}{a_3 + a_5}\right) =$
$= \frac{2}{3}\,b^2\,(4\,a_3 + 5\,a_5)$;

» » » $IKMO: b\,(a_5 + a_7) \times \left(4b + \frac{2}{3}\,b\,\frac{a_5 + 2a_7}{a_5 + a_7}\right) =$
$= \frac{2}{3}\,b^2\,(7\,a_5 + 8\,a_7)$.

Moment des Segmentes $BDF\alpha : \frac{2}{3}\,b^2\,(2\,a_2 - a_1 - a_3)$;
» » » $FHK\beta : \frac{2}{3}\,b^2\,(6\,a_4 - 3\,a_3 - 3\,a_5)$;
» » » $KMO\gamma : \frac{2}{3}\,b^2\,(10\,a_6 - 5\,a_5 - 5\,a_7)$.

Addirt man alle diese Momente, ordnet die Summe zweckmäßig und dividirt dieselbe durch den Inhalt der ganzen Figur, d. i. durch:

$$\frac{1}{3}\,b\,(a_1 + 4\,a_2 + 2\,a_3 + 4\,a_4 + 2\,a_5 + 4\,a_6 + a_7),$$

so erhält man

$$\text{I., } y = b.\frac{o.a_1 + 1.4a_2 + 2.2a_3 + 3.4a_4 + 4.2a_5 + 5.4a_6 + 6a_7}{a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 4a_4 + 2a_5 + 4a_6 + a_7}.$$

Hierbei sieht man zugleich, wie sich dieser Ausdruck für jede Zahl von Ordinaten benutzen und in eine praktische Regel einkleiden läßt. Ist die Curve geschlossen, oder hat die Figur nicht zwei parallele Seiten, so wird die erste und letzte Ordinate $= 0$ u. s. f.

Wie der Abstand des Schwerpunktes von der Horizontale *AN* gefunden werden kann, soll später gezeigt werden.

Anmerkung. Zur Herleitung der von dem Engländer Simpson ursprünglich zur Berechnung von Flächen aufgestellten Regel diene Nachstehendes.

Betrachtet man in Fig. 37. *BDF* als einen Parabelbogen, so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen für den Inhalt des Flächentheiles $ABDFE = f'$ zu setzen:

$$(1.)\ f' = b\,(a_1 + a_3) + \tfrac{2}{3}\,AE\,.\,D\alpha\ ^*).$$

Statt $D\alpha$ läßt sich (annäherungsweise) setzen $a_2 - \frac{a_1 + a_3}{2}$, d. i.

$$D\alpha = \frac{2a_2 - a_1 - a_3}{2}.$$

Da ferner $AE = 2b$ ist, so erhält man überhaupt aus (1.)

$f' = b\,(a_1 + a_3) + \frac{2}{3}\,b\,(2a_2 - a_1 - a_3)$. Hieraus aber

$$f' = \frac{b}{3}\,(a_1 + 4a_2 + a_3).$$

Auf gleiche Weise findet man für die Inhalte f_2 und f_3 der Flächenstücke *FJ* und *KN*

$$f_2 = \frac{b}{3}\,(a_3 + 4a_4 + a_5);$$

$$f_3 = \frac{b}{3}\,(a_5 + 4a_6 + a_7).$$

Demnach also für den Inhalt $= F$ der ganzen Fläche *BN*, nach gehöriger Zusammenziehung,

$$F = \frac{b}{3}\left\{a_1 + a_7 + 4\,(a_2 + a_4 + a_6) + 2\,(a_3 + a_5)\right\}.$$

Man wird leicht bemerken, daß die Zahl der Theile auf *AN* (der Abscissenaxe) immer gerade angenommen werden muß, damit man eine ungerade Anzahl Ordinaten erhält, welche unsere Ableitung voraussetzt. Bezeichnet daher $2n$ die gedachte gerade (aber beliebige) Anzahl gleicher Theile, so ist ganz allgemein zu setzen:

$$F = \frac{b}{3}\left\{a_1 + a_{2n+1} + 4\,(a_2 + a_4 \ldots + a_{2n}) + 2\,(a_3 + a_5 \ldots + a_{2n-1})\right\}.$$

In dem hieraus folgenden allgemeinen Satze besteht die Simpsonsche Regel.

---

*) Bezeichnet e die Pfeilhöhe des Parabelsegmentes $BDF\alpha B$, so lehrt die Geometrie, daß der Inhalt dieses Segmentes $\frac{2}{3}\,e\,.\,BF$ ist. Da sich aber verhalten muß $e : D\alpha = AE : BF$, so ist auch $e\,.\,BF = AE\,.\,D\alpha$, wie oben angenommen wurde.

Schwerpunkte krummer Flächen.

§. 52.

Das gesammte Gewicht der Oberfläche eines Prismas oder Cylinders kann man in dem Umfange der Fläche gleichförmig vertheilt annehmen, welche entsteht, wenn durch die Mitte der Länge des Körpers eine zu den Endflächen parallele Ebene gelegt wird, wofür man aber auch sagen kann, der Schwerpunkt liege in der Mitte der Axe.

§. 53.

Schwerpunkt des Mantels eines senkrechten Kegels.

Denkt man sich den ganzen Kegelmantel durch unendlich viele aus der Spitze nach dem Umfange der Grundfläche gezogene Linien in Dreiecke zerlegt, so müssen deren Schwerpunkte einen um $\frac{1}{3}$ der Axe von der Grundfläche abstehenden Kreis bilden. Der Schwerpunkt des Kegelmantels liegt daher im zweiten Drittheile der Axe, von der Spitze aus gerechnet.

§. 54.

Schwerpunkt des Mantels einer Kugelzone oder einer Calotte.

Man denke sich die ganze Zone oder Calotte durch gleich weit von einander abstehende und zu der Grundfläche parallele Ebenen in unendlich viele Theile getheilt; da nun der Schwerpunkt jeder dieser unendlich kleinen Zonen in der Mitte ihrer Höhe liegt, so kann man sich auch das Gewicht der ganzen Zone oder Calotte über ihre Höhe gleichmäßig vertheilt denken; der Schwerpunkt des ganzen Mantels liegt daher in der Mitte derjenigen Linie, welche vom Scheitel nach der Mitte der Grundfläche der Zone oder Calotte gezogen wird.

Schwerpunkte der Körper.

§. 55.

Schwerpunkt eines prismatischen Körpers.

Zerlegt man den prismatischen Körper durch Parallelschnitte zur Grundfläche in Elemente, so müssen die Schwerpunkte aller in der geraden Linie liegen, welche die Schwerpunkte der Grund- und Endfläche mit einander verbindet; hieraus folgt aber auch, daß der Schwerpunkt in der Mitte der Axe des ganzen Körpers liegt.

§. 56.

Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide.

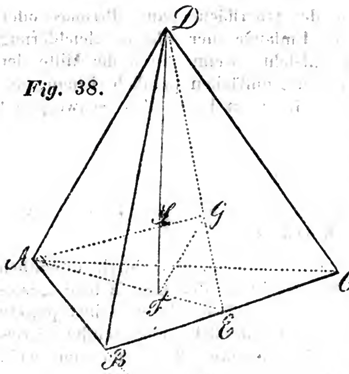


Fig. 38.

Ist F Fig. 38. der Schwerpunkt des die Grundfläche bildenden Dreiecks ABC der Pyramide, so müssen die Schwerpunkte aller zu dieser Fläche parallelen Schnitte in der Linie DF liegen, und demnach diese letztere Linie selbst eine Schwerlinie sein.

Aus demselben Grunde ist AG eine Schwerlinie, da sie den Schwerpunkt G des Dreiecks BCD mit der gegenüber liegenden Ecke A verbindet. Es liegen aber auch DF und AG in einerlei Ebene, so daß S der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien oder der Schwerpunkt der ganzen Pyramide ist.

Zieht man die Linie FG, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ADS und SFG, in welchen sich verhält:

$$FG : AD = SF : DS.$$

Da aber $FE = \frac{1}{3} AE$ ist, so muß auch $FG = \frac{1}{3} AD$ sein, daher

$$\tfrac{1}{3} AD : AD = SF : DS, \text{ oder}$$

$$1 : 3 = SF : DS.$$

Hieraus erhält man aber auch

$$1 : 1 + 3 = SF : SF + DS;$$

$$1 : 4 = SF : DF, \text{ und}$$

$$SF = \tfrac{1}{4} DF, \text{ d. h.}$$

der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt, von der Grundfläche aus gerechnet, im ersten Viertel der Linie, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet.

Hieran läßt sich leicht der Beweis knüpfen, daß auch bei der vielseitigen Pyramide, und ebenso beim Kegel der Schwerpunkt auf $\frac{1}{4}$ der Höhe in derjenigen Linie liegt, die vom Schwerpunkte der Grundfläche aus nach der Spitze gezogen werden kann.

§. 57.

Schwerpunkt einer mit der Grundfläche parallel abgekürzten Pyramide.

Denkt man sich die Pyramide als vollständig, so ist leicht

einzusehen, daß das Moment der ganzen Pyramide der Summe der Momente der abgekürzten Pyramide und der Ergänzungspyramide gleich sein muß.

Bezeichnet man demnach den Inhalt der Grundfläche mit G, den der Endfläche mit g, den rechtwinkeligen Abstand dieser beiden Flächen mit h, die Höhe der Ergänzungspyramide mit x und den Abstand des zu suchenden Schwerpunktes von der Grundfläche mit Z, so muß die Gleichung bestehen

$$\tfrac{1}{3}G(h+x)\times\tfrac{1}{4}(h+x)=\tfrac{1}{3}h(G+\sqrt{Gg}+g)\times Z+\frac{gx}{3}\times(h+\tfrac{1}{4}x)$$

$$\text{d. g. (1.)}\quad Z=\frac{G(h+x)^2-gx(4h+x)}{4h(G+\sqrt{Gg}+g)}.$$

Nach geometrischen Sätzen ist aber

$$x=\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}};$$

sonach, wenn dieser Werth in (1.) gesetzt wird,

$$Z=\frac{h}{4}\cdot\frac{G^2-4g\sqrt{Gg}+3g^2}{(G+\sqrt{Gg}+g)(\sqrt{G}-\sqrt{g})^2};$$

oder, nach entsprechender Division mit dem Binomialfactor des Nenners in den Zähler,

$$\text{I.}\quad Z=\frac{h}{4}\cdot\frac{G+2\sqrt{Gg}+3g}{G+\sqrt{Gg}+g}.$$

Auch für den mit der Grundfläche parallel abgekürzten Kegel müssen alle vorstehenden Schlüsse gelten, so daß man für selbigen erhält, wenn der Radius der Grundfläche R, der der Endfläche $=r$ gesetzt wird,

$$\text{II.}\quad Z=\frac{h}{4}\cdot\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}.$$

§. 58.

Schwerpunkt eines Polyeders.

Die Geometrie lehrt, daß man jedes Polyeder in Pyramiden zerlegen kann. Nimmt man daher für den gegenwärtigen Fall eine solche Zerlegung vor, bestimmt den Schwerpunkt jeder einzelnen Pyramide, giebt die Momente aller gegen irgend eine Ebene an und dividirt endlich die Summe dieser Momente durch den kubischen Inhalt des Polyeders; so muß der Quotient den Abstand des Schwerpunktes von der angenommenen Ebene angeben.

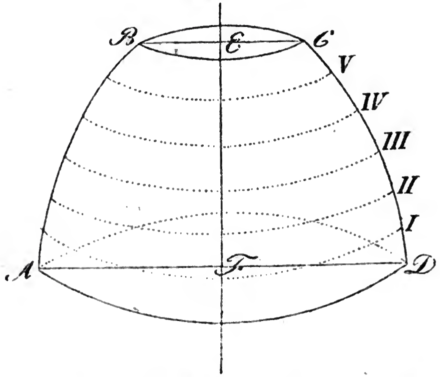
Auf solche Weise läßt sich dieser Abstand von drei auf einander rechtwinkeligen Coordinaten-Ebenen finden, oder der Schwerpunkt des ganzen Körpers vollständig bestimmen.

§. 59.

Schwerpunkt eines Körpers, der als durch Umdrehung irgend einer Ebene um eine feste Axe entstanden angenommen werden kann.

Es sei ***ABCD*** Fig. 39. irgend ein beliebiges Conoid mit parallelen Endflächen. Die Axe ***EF*** desselben werde in gleich große Theile getheilt und durch die Theilpunkte parallel zu den Endflächen, Durchschnittsebenen I, II, III u. s. w. gelegt, so bilden letztere offenbar Kreisflächen, deren Inhalte als abstracte Zahlen angesehen und als Ordinaten einer Curve aufgetragen werden können, wie dies §. 51. geschah.

Fig. 39.



Ist sodann die Axe ***FE*** gleich der Abscissenlinie ***AN*** Fig. 37, so muß die Schwerpunktsentfernung $= Z$ des Körpers ***ABCD*** von der Ebene ***AD*** dieselbe sein, als die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche ***ABON*** Fig. 37. von der Ordinate ***AB*** daselbst. Man erhält also auch, wenn man ***EF***, wie am gedachten Orte ***AN***, ebenfalls in sechs gleiche Theile getheilt voraussetzt:

$$Z = b.\frac{o.A + 1.4.B + 2.2\,C + 3.4\,D. + 4.2\,E + 5.4.F + 6\,G}{A + 4\,B + 2\,C + 4\,D + 2\,E + 4\,F + G}.$$

Sind aber die Radien der einzelnen Kreisflächen beziehlich

a_1, a_2, a_3, a_4 u. s. f., so ist $A = a^2_1\,\pi$, $B = a^2_2\,\pi$, $C = a^2_3\,\pi$, $D = a^2_4\,\pi$ u. s. f., und deshalb

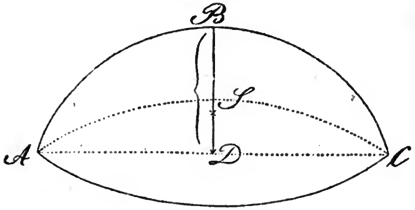
$$\text{I. } Z = b\,\frac{o.a^2_1 + 1.4.a^2_2 + 2.2\,a^2_3 + 3.4.a^2_4 + 4.2\,a^2_5 + 5.4.a^2_6 + 6\,a^2_7}{a^2_1 + 4\,a^2_2 + 2\,a^2_3 + 4\,a^2_4 + 2\,a^2_5 + 4\,a^2_6 + a^2_7}.$$

§. 60.

Für die Anwendung der Gleichung I. des vorigen § diene Nachstehendes.

1. Schwerpunkt eines Kugelsegmentes.

Fig. 40.



Es sei AC Fig. 40. der Begrenzungskreis, $DB = h$ die Höhe des Segmentes und r der Halbmesser der zugehörigen Kugel. Sodann denke man sich BD in zwei gleiche Theile getheilt, wonach zuerst aus I. des vorigen §. folgt

$$Z = b\,\frac{o.\,a^2_1 + 4\,a^2_2 + 2\,a^2_3}{a^2_1 + 4\,a^2_2 + a^2_3}.\text{*)}$$

Ferner ist $b = \frac{1}{2}\,h$, $a^2_1 = 2\,rh - h^2$, $a^2_2 = rh - \frac{1}{4}\,h^2$, $a^2_3 = 0$. Durch Substitution dieser Werthe folgt aber

$$Z = \tfrac{1}{2}\,h.\frac{4\,rh - h^2}{2\,rh - h^2 + 4\,rh - h^2};\text{ d. i.}$$

$$Z = \tfrac{1}{4}\,h.\frac{4\,r - h}{3\,r - h}.$$

Für $r = h$ erhält man den Abstand des Schwerpunktes der Halbkugel vom größten Kreise derselben, zu

$$Z = \tfrac{3}{8}\,r;$$

so wie den Abstand desselben vom Scheitel aus gerechnet, zu

$$Z' = \tfrac{5}{8}\,r.$$

---

*) Nach der Hauptformel ist nämlich der Coefficient des letzten Gliedes im Zähler bei n Ordinaten $= n - 1$, der des letzten Gliedes im Nenner aber $= 1$.

2. Schwerpunkt eines parabolischen Conoides.

Die Höhe des Conoides sei $= h$. Dieselbe werde zur nochmehrigen Verständigung der Hauptformel in vier gleiche Theile getheilt und der Schwerpunktsabstand in der Axe vom Scheitel des Conoides aus bestimmt.

Hiernach ist $b = \frac{1}{4} h$, ferner $a^2_1 = 0$. Mit Hülfe der Parabelgleichung $y^2 = px$ aber $a^2_2 = \frac{1}{4} ph$, $a^2_3 = \frac{1}{2} ph$, $a^2_4 = \frac{3}{4} ph$, $a^2_5 = ph$, so wie $a^2_6 = a^2_7$ u. s. f. $=$ Null. Durch Einführung dieser Werthe in

$$Z = b. \frac{o.a^2_1 + 1.4\,a^2_2 + 2.2\,a^2_3 + 3.4.a^2_4 + 4\,a^2_5}{a^2_1 + 4\,a^2_2 + 2\,a^2_3 + 4\,a^2_4 + a^2_5}, \text{ folgt}$$

$$Z = \tfrac{2}{3} h.$$

§. 61.

Mechanische Bestimmung des Schwerpunktes ganz unregelmäßiger Körper.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes ganz unregelmäßiger oder nicht homogener Körper läßt sich zwar das §. 42. angegebene Verfahren anwenden, zweckmäßiger, auch genauer ist jedoch folgende Methode.

Man lege den Körper nach seiner Längenrichtung mit dem einen äußersten Ende (oder mit einer besonders hierzu angebrachten und geeigneten Verlängerung desselben) auf eine horizontale scharfe Kante (Schneide), verbinde das andere Ende mit einer der beiden Schalen einer gemeinen Wage, und belaste die andere Schale derartig mit Gewichten, daß die Axe des Körpers eine horizontale Lage annimmt.

Bezeichnet sodann q die letzgedachten Gewichte, hat man ferner vorher das ganze Gewicht des Körpers $= Q$, seine Länge l ermittelt und wird die unbekannte Entfernung des Schwerpunktes von der bemerkten Schneide $= x$ gesetzt, so erhält man unmittelbar aus §. 19:

$$x = \frac{q.l}{Q}.$$

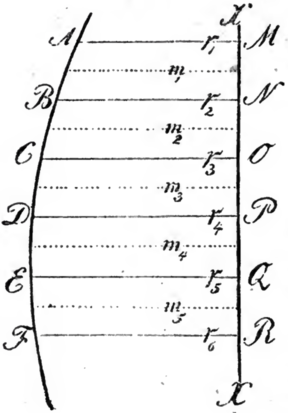
Guldin's Regel.

§. 62.

Eine eben so nützliche als interessante Anwendung der Sätze vom Schwerpunkte lehrte zuerst der Pater Guldin machen, nämlich die Oberflächen und Inhalte solcher Körper zu bestimmen, welche als durch Axendrehung entstanden gedacht werden können.

Es sei zunächst *ABCDEF* Fig. 41. irgend eine gebrochene oder krumme Linie und *XX* eine mit ihr in einerlei Ebene

Fig. 41.



liegende Axe. Die Linie denke man sich ferner in Elemente *AB*, *BC*, *CD* ..... zerlegt, deren Schwerpunkte in ihren Mitten liegen und von *X*, *X* beziehlich um m_1, m_2, m_3, m_4 ..... entfernt sein mögen. Denkt man sich ferner von den Endpunkten der einzelnen Linienelementen Normalen *AM*, *BN*, *CO* u. s. f. auf *XX* gefällt, deren Längen r_1, r_2, r_3, r_4 ..... betragen, und die ganze Linie um die Axe *XX* einmal vollständig herumgedreht, so wird man annehmen können, daß jedes der Elemente die Mantelfläche eines abgekürzten Kegels beschreibt, und der Inhalt $= O$ der Oberfläche, welche von der ganzen Linie erzeugt wird, ist

$$(1.)\quad O = 2\pi\,(m_1\,AB + m_2\,BC + m_3\,CD\ \ldots\ldots).$$

Betrachtet man die in der Parenthese befindlichen Glieder näher, so wird man leicht finden, daß sie nichts anderes als die Summe der Momente aller Elemente der Linie in Bezug auf die gemeinsame Axe *XX* bilden. Nach dem Früheren muß aber diese Summe dem Momente der ganzen Linie bezogen auf dieselbe Axe gleich sein, so daß man erhält, wenn man die rectificirte Länge der Linie mit *L*, ihre Schwerpunkts-Entfernung von *XX* mit z bezeichnet

$$Lz = m_1\,AB + m_2\,BC + m_3\,DC\ \ldots\ldots;$$

demnach, wenn die entsprechende Substitution in (1.) vorgenommen wird:

$$\text{I.}\quad O = 2\pi z.\ L,\ \text{d. h.}$$

die Mantelfläche des Körpers, welcher entsteht, wenn sich eine Linie um eine feste Axe dreht, ist gleich dem Producte aus der Länge dieser Linie, multiplicirt mit dem Wege, den ihr Schwerpunkt zurücklegt.

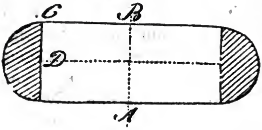
Man wird leicht erkennen, daß diese Regel so wohl für eine ganze als theilweise Umdrehung der Linie um die feste Axe

gilt. Bei einer Umdrehung um einen Bogen $\varphi < 2\pi$, folgt daher aus I.

II. $O = \varphi . z . L.$

Beispiel. Ist die krumme Oberfläche eines ringförmigen Körpers zu berechnen, welcher als durch eine ganze Umdrehung des Halbkreises vom Radius $CD = r$, Fig. 42. um die Axe AB entstanden gedacht werden kann, so erhält man, wenn $CB = R$ gegeben ist, mit Bezug auf III. §. 44:

Fig. 42.



$$z = R + \frac{2r}{\pi};\ L = r\pi;\ \text{demnach}$$

$$O = 2\pi\left(R + \frac{2r}{\pi}\right)r\pi;$$

$$O = 2r\pi(R\pi + 2r).$$

§. 63.

Wird $AFRM$ Fig. 41. als eine Fläche angenommen, und bezeichnet man die Höhen der Flächenelemente MN, NO, OP ..... mit h_1, h_2, h_3 .... h_n, so ist der Inhalt des aus abgekürzten Kegeln bestehenden Körpers, wenn die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten werden:

$$(1.)\ K = \frac{h_1\pi}{3}(r^2_1 + r_1 r_2 + r^2_2) + \frac{h_2\pi}{3}(r^2_2 + r_2 r_3 + r^2_3) + $$
$$+ \frac{h_3\pi}{3}(r^2_3 + r_3 r_4 + r^2_4) + \ldots.$$

Die Schwerpunkts-Entfernung z_1, z_2, z_3 .... z_n der einzelnen Trapezflächen AN, BO, CP ..... ist nach III. §. 47:

$$z_1 = \frac{r^2_1 + r_1 r_2 + r^2_2}{3(r_1 + r_2)};\quad z_2 = \frac{r^2_2 + r_2 r_3 + r^2_3}{3(r_2 + r_3)};$$

$$z_3 = \frac{r^2_3 + r_3 r_4 + r^2_4}{3(r_3 + r_4)}\ \text{u. s. f.};$$

oder wenn man die Inhalte f_1, f_2, f_3 .... f_n der Trapeze einführt, und bemerkt, daß dann

$$f_1 = \frac{h_2}{2}(r_1 + r_2);\quad f_2 = \frac{h_2}{2}(r_2 + r_3);$$

$$f_3 = \frac{h_3}{2}(r_3 + r_4)\ \text{u. s. f. ist;}$$

$$z_1 = \frac{h_1(r^2_1 + r_1 r_2 + r^2_2)}{6f_1};\quad z_2 = \frac{h_2(r^2_2 + r_2 r_3 + r^2_3)}{6f_2};$$

$$z_3 = \frac{h_3(r^2_3 + r_3 r_4 + r^2_4)}{6f_3}\ \text{u. s. f.}$$

Durch Reduction und nachherige Substitution dieser Werthe in (1.) erhält man aber

(2.) $K = 2\pi(f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 + \ldots + f_n z_n)$.

Bezeichnet nun F den Inhalt der erzeugenden Fläche AR und z den Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe XX, so findet wieder die Momentengleichung statt

$$Fz = (f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 + \ldots + f_n z_n);$$

und demnach aus (2.)

$$\text{I. } K = 2\pi z . F, \text{ d. h.}$$

der Inhalt eines Körpers, welcher durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine feste Axe entsteht, ist gleich dem Producte aus dem Inhalte der erzeugenden Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunkt zurücklegt.

Bei einer Umdrehung der Fläche um einen Bogen $\varphi < 2\pi$, erhält man auch hier

$$\text{II. } K = \varphi . z . F.$$

Beispiel. Für den ringförmigen Körper Fig. 42. ist mit Bezug auf III. §. 49.

$z = R + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$; $F = \frac{r^2\pi}{2}$; demnach sein körperlicher Inhalt

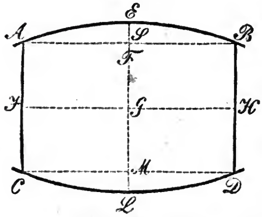
$$K = 2\pi\left(R + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\frac{r^2\pi}{2};$$

$$K = r^2\pi\,(R\pi + \tfrac{4}{3} r).$$

§. 64.

Eine recht vortheilhafte Anwendung findet die Guldin'sche Regel bei der Bestimmung des kubischen Inhaltes der Fässer, was in dem Folgenden gezeigt werden soll.

Fig. 43.



Es sei $ABCD$ Fig. 43. der senkrechte Längendurchschnitt eines Fasses. Die Länge desselben (im Innern gemessen) $JH = l$, die Spundtiefe $EL = 2a$, die Bodentiefe $BD = AC = 2b$.

Der ganze Inhalt läßt sich dem eines Cylinders $AFBDMC$ und eines Körpers gleich setzen, der durch (eine ganze) Umdrehung der Fläche $AEBF$ um JH als Axe entstanden ist.

Zur Bestimmung des letzteren Körpertheiles betrachten wir AEB (die sogenannte Faßlinie) als den Bogen einer gemeinen Parabel, so daß der Inhalt der Fläche $AEBF$ gleich $\frac{2}{3}\,l(a-b) = F$, oder für $a - b = d$*), $F = \frac{2}{3}\,dl$ ist.

*) $2a - 2b = 2d$ wird die Spitzung genannt. Letztere nimmt man gewöhnlich als einen aliquoten Theil der Daubenlänge $AEB = L$. Wird L in n gleiche Theile getheilt, so heißt $\frac{L}{n}$ ein Faßstich.

Da nach §. 50. der Schwerpunkt S dieser Fläche von AB aus in der Entfernung $FS = \frac{2}{5} EF = \frac{2}{5} d$ liegt, so giebt die Guldin'sche Regel für den fraglichen Inhalt:

$$(1.)\ 2\pi\left(b + \tfrac{2}{5} d\right) . \tfrac{2}{3} d l = \tfrac{4}{15} \pi d l (5b + 2d).$$

Addirt man hierzu den körperlichen Inhalt des Cylinders $ABCD$, der zufolge unserer Bezeichnung $\pi b^2 . l$ ist, so ergiebt sich der ganze Faßinhalt $= K$ zu

$$K = \pi l \left\{ b^2 + \tfrac{4}{15} d (5b + 2d) \right\}; \text{ oder auch}$$

$$\text{I. } K = \pi l \left\{ b^2 + \tfrac{4}{3} bd + \tfrac{8}{15} d^2 \right\}.$$

Statt letzterem Ausdrucke läßt sich ein einfacherer, aber hinreichend genauer, Annäherungswerth setzen.

Vertauscht man nämlich den Coefficienten $\frac{8}{15}$ mit $\frac{4}{9}$, so folgt

$$K = \pi l \left(b + \tfrac{2}{3} d\right)^2; \text{ oder da } d = a - b \text{ ist}$$

$$K = \pi l \left(\frac{2a + b}{3}\right)^2.$$

Führt man endlich hier noch die ganze Spundtiefe und eben so die ganze Bodentiefe ein, setzt erstere $= A$, letztere $= B$, so folgt

$$K = \pi . \tfrac{1}{4} \left(\frac{2A + B}{3}\right)^2 . l, \text{ d. h.}$$

Der ganze Inhalt ist dem eines Cylinders gleich, welcher mit dem Fasse gleiche Länge hat und dessen Durchmesser $\frac{2A + B}{3}$ ist.

Drittes Kapitel.

Von der Stabilität fester Körper.

§. 65.

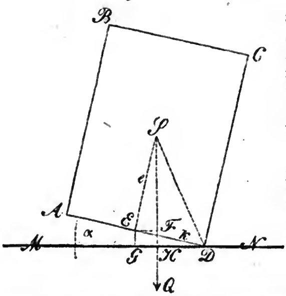
Befindet sich ein einzelner Körper, oder ein festes System von Körpern ursprünglich im Gleichgewichtszustande und wird es aus diesem gebracht, in eine Bewegung versetzt, so sagt man das Gleichgewicht ist sicher (stabil) oder unsicher (labil), je nachdem die Rückkehr in den ersten Gleichgewichtszustand von selbst erfolgt oder nicht. Zeigt endlich ein aus seiner ursprünglichen Lage gebrachter Körper weder ein Bestreben die begonnene Bewegung fortzusetzen, noch in die erste Lage zurückzukehren, so sagt man, er befindet sich im Zustande der völligen Gleichgültigkeit.

So kann z. B. ein um eine horizontale Axe drehbarer Stab (Wagbalken) irgend einen dieser drei Gleichgewichtszustände zeigen. Ein eiförmiger Körper respective mit der kleinern oder größern Axe auf eine horizontale Ebene gelegt oder gestellt, zeigt im erstern Falle stabiles, im letztern labiles Gleichgewicht etc. etc.

§. 66.

Wir betrachten hier zunächst die Stabilität prismatischer Körper, welche sich gegen eine feste horizontale Ebene stützen und durch einwirkende Kräfte zu einer Drehung um irgend eine ihrer Kanten veranlaßt werden.

Fig. 44.



Zur Herleitung allgemeiner Sätze sei $ABCD$ Fig. 44. das Profil eines solchen prismatischer Körpers, der bereits durch eine äußere Kraft um den Winkel $ADM = \alpha$ gedreht, nachher aber sich selbst überlassen wurde.

Sein Schwerpunkt befinde sich in S, sein Gewicht sei $= Q$. Eine Normale SE auf AD werde $= e$, der Abstand $ED = k$ gesetzt.

Das statische Moment von Q bezogen auf D (oder eine durch diesen Punkt gehende horizontale Axe), welches $= S$ gesetzt werden mag, ergiebt sich sodann, zu

$$(1.)\ S = Q \,.\, DH.$$

Es ist aber, mit Bezug auf die Figur, $DH = GD - EF$, also $DH = k \cos \alpha - e \sin \alpha$, mithin

$$\text{I.}\quad S = Q\,(k \cos \alpha - e \sin \alpha).$$

Dieses Moment wird aber als das Maß der Stabilität zu betrachten sein, und weshalb es auch geradezu die Stabilität selbst, in Bezug auf die angenommene Drehkante, genannt wird.

Unmittelbar aus diesem Ausdrucke geht aber hervor, daß je nachdem $k \cos \alpha - e \sin \alpha$, einen positiven oder negativen Werth giebt, die Stabilität des Prismas sicher oder unsicher ist.

In dem Falle, wo gedachter Ausdruck gleich Null wird, kann der Körper zwar in der entsprechenden Lage Gleichgewicht zeigen, aber die geringste Kraft vermag ihn auch umzuwerfen.

Zugleich erkennt man, daß die Stabilität des Prismas um so bedeutender ist, je größer k und je kleiner e in besonderen Fällen wird.

Für $\alpha = 0$, erhält man aus I.

$$\text{II.} \quad S = Qk,$$

wodurch der Widerstand oder die Stabilität eines auf der horizontalen Ebene mit einer seiner Endflächen ruhenden Körpers gegen Umkanten um D ausgedrückt wird.

Verbindet man in Fig. 44. S mit D, setzt die Länge dieser Geraden $= l$ und $\angle SDM = \varphi$, so kann statt I. auch geschrieben werden

$$\text{III.} \quad S = Q\,l \cos\varphi.$$

Aus diesem Ausdrucke lassen sich für manche besondere Fälle interessante und für practische Anwendung nützliche Schlüsse ziehen.

Liegt z. B. S vertikal über D und bezeichnet δ den Winkel, um welchen der Körper um D rechts oder links gedreht wird, so folgt aus III.

$$S = Q\,l \cos(90 \pm \delta);$$

so wie wenn S unter D liegt

$$S = Q\,l \cos(270 \pm \delta)$$

Resultate, die mit Beachtung der relativen Zeichen der trigonometrischen Linien leicht in Worten auszudrücken sind.

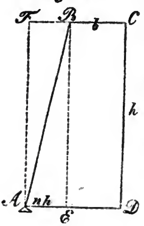
§. 67.

Die meiste technische Anwendung findet die Gleichung II. des vorigen §. und zwar bei der Berechnung der Stabilität derjenigen Mauern (Futtermauern), welche dem Drucke der Erde, des Wassers etc. Widerstand zu leisten haben *).

In Bezug hierauf mögen einige Aufgaben folgen.

Aufgabe 1. Es sei $ABCD$ Fig. 45. der senkrechte Querschnitt einer ebenen Böschungsmauer (dossirten Mauer), man soll die Stabilität derselben in Bezug auf die Kante A bestimmen. Die Höhe CD der Mauer sei $= h$, die obere Breite $BC = b$, die Ausladung AE der Böschung $= nh$, wo n ein echter Bruch ist, die Länge $= 1$ und das Gewicht der Cubikeinheit Mauerwerk sei $= p$.

Fig. 45.



*) Ueber Größe, Richtung und Lage der Mittelkraft, welche die Stabilität der Mauer in den gedachten Fällen in Anspruch nimmt, giebt die Theorie des Erddruckes und die Hydrostatik Auskunft.

Das Gewicht des Mauertheiles *BCDE* ist: $p \cdot bh$, sein Hebelarm in Bezug auf A: $(\frac{1}{2} b + nh)$,

das Gewicht des Mauertheiles *ABE* ist: $p \frac{nh^2}{2}$, sein Hebelarm in Bezug auf A: $\frac{2}{3} nh$.

Daher nach II. des vorigen §.

$$\text{I.} \quad S = \tfrac{1}{3} p \cdot n^2 h^3 + p \cdot bh (\tfrac{1}{2} b + nh).$$

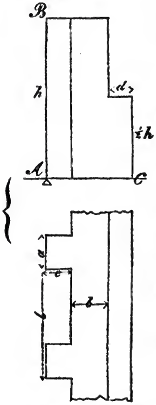
Bildete der Querschnitt ein vollständiges Rechteck *AFCD*, so würde sich auf ähnliche Weise ergeben:

$$\text{II.} \quad S = \tfrac{1}{2} p (b + nh)^2 . h.$$

Durch Einführung besonderer Werthe in I. und II. läßt sich zeigen, welchen Vortheil dossirte Mauern, hinsichtlich des Materialaufwandes, bei gleicher Stabilität gegen Mauern von überall gleicher Dicke bieten.

Aufgabe 2. Von einer mit rechtwinkligen Strebepfeilern und einer Fußbank versehenen Mauer *ABC* Fig. 46. (im Aufrisse und Grundrisse) ist das Stabilitätsmoment in Bezug auf die Kante *A* zu bestimmen.

Fig. 46.



Auflösung. Es sei h die gleiche Höhe der Mauer und Strebepfeiler, so wie $\frac{h}{2}$ die der Fußbank, b die obere Stärke der (einfachen) Mauer, e und a die Dimensionen des horizontalen Querschnittes eines Strebepfeilers (in Bezug auf die Figur), l die Entfernung je zweier Strebepfeiler, von Mitte zu Mitte derselben gemessen, d die Fußbankstärke, endlich sei wieder p das Gewicht der Cubikeinheit Mauerwerk.

Hiernach erhält man folgende statische Momente:

das eines Strebepfeilers: $\frac{1}{2} p . ae^2 h$,

» der Mauer (auf die Länge l): $p . bhl (\frac{1}{2} b + e)$,

» » Fußbank » » » : $p \frac{dhl}{2} (e + b + \frac{1}{2} d)$;

folglich:

$$\text{III.} \quad S = ph \left\{ \tfrac{1}{2} ae^2 + bl (\tfrac{1}{2} b + e) + \frac{dl}{2} (e + b + \tfrac{1}{2} d) \right\}.$$

Giebt man jetzt den einzelnen Größen aller drei Gleichungen I., II. und III. entsprechend übereinstimmende Werthe, so lassen sich die

Vortheile der verschiedenen Mauern, in Betreff des Materialaufwandes bei gleicher Stabilität, leicht erkennen.

Aufgabe 3. Man soll das Profil einer dossirten Mauer bestimmen, welche mit einer anderen Mauer von durchaus gleicher Stärke $= b$, dieselbe Stabilität besitzt, der Cubikinhalt der ersteren jedoch nur $\frac{m}{n}$ der letzteren beträgt. Höhe $= h$ und Länge $= l$ beider Mauern seien gleich.

Auflösung. Denkt man sich das Profil $ABCD$ Fig. 45. als das verlangte, setzt $BC = x$, $AE = y$, so ergiebt sich eine Bedingungsgleichung zu:

$$\tfrac{1}{2} b^2 he = \tfrac{1}{3} hly^3 + xhl\,(y + \tfrac{1}{2} x), \text{ d. i.}$$

$$(1.)\ 2y^2 + 3x^2 + 6xy = 3b^2.$$

Zufolge des festgesetzten Materialaufwandes findet man ferner:

$$\frac{m}{n}\ bhl = \tfrac{1}{2} hl\,(2x + y), \text{ oder}$$

$$(2.)\ 2x + y = 2\frac{m}{n} b.$$

Endlich folgt, durch Verbindung und Reduction aus (1) und (2),

$$\text{I.}\quad x = b\left\{-2\frac{m}{n} + \sqrt{\left(12\frac{m^2}{n^2} - 3\right)}\right\};$$

$$\text{II.}\quad y = 2b\left\{3\frac{m}{n} - \sqrt{\left(12\frac{m^2}{n^2} - 3\right)}\right\}.$$

Die Möglichkeit von x ist an die Bedingung gebunden, daß

$$\sqrt{12\frac{m^2}{n^2} - 3} > 2\frac{m}{n}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{m}{n} > 0{,}61.$$

Es wäre also höchstens eine Materialersparniß von $\frac{1}{3}$ möglich, indem dann $\frac{m}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}66$ sein würde.

Für $\frac{m}{n} = \frac{4}{5}$, oder bei $\frac{1}{5}$ Materialersparniß, müßte man

$$x = 0{,}56 \,.\, b,$$
$$y = 0{,}47 \,.\, b \text{ nehmen.}$$

Aufgabe 4. Eine Mauer, deren Länge $= l$, Stärke $= b$, und Höhe $= h$ ist, soll durch eine aus demselben Materiale ersetzt werden, deren Länge und Höhe dieselbe, deren Stärke aber $\frac{b}{2}$ beträgt. Wie kann dies geschehen?

Auflösung. Durch die neue Mauer soll die Hälfte des Materiales erspart werden, weshalb solche nach der vorigen Aufgabe keine dossirte sein kann. Wir wählen deshalb eine, welche an der Außenseite mit rechtwinkligen Strebepfeilern Fig. 46. (jedoch ohne Fußbank) versehen ist. Die Entfernung zweier Strebepfeiler sei $= x$, alle sonstigen Bezeichnungen mögen die der zweiten Aufgabe sein.

Sodann findet sich

$$p\frac{b^2 h}{2} . x = p \left\{ \frac{ae^2 h}{2} + \frac{bhx}{2} \left(\frac{b}{4} + e\right) \right\}.$$

Hieraus aber

$$x = \frac{4ae^2}{3b^2 - 4be}.$$

Viertes Kapitel.

Von der Reibung.

§. 68.

Berühren sich zwei Körper unmittelbar und üben sie irgend einen Druck auf einander aus, sind aber dabei die Kräfte, welche auf sie einwirken, unter einander im Gleichgewichte, so müßte nach dem Früheren die geringste Verminderung oder Vermehrung derselben im Stande sein, eine Bewegung zu erzeugen. So richtig dieß an und für sich ist, eben so wenig wird solches durch die Erfahrung bestätigt, indem dort oft eine mehr oder minder bedeutende Kraft wirksam werden muß, wenn eine wirkliche Störung des Gleichgewichtes stattfinden soll. Der vorzüglichste Grund dieser Erscheinung liegt in den Unebenheiten der Berührungsflächen der Körper, vermöge welcher die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern und umgekehrt greifen und, wenn Bewegung entstehen soll, die Hervorragungen entweder abgebrochen, umgebogen oder über einander weggehoben werden müssen. Der Widerstand, welcher sich einer bewegenden Kraft hierdurch entgegensetzt, heißt der Widerstand der Reibung oder schlechthin die Reibung (Friction).

Um die Reibung zu vermindern, glättet oder polirt man die sich berührenden Oberflächen so viel als möglich und bringt außerdem zwischen dieselben sehr weiche oder flüssige Körper, sogenannte Schmiermittel, welche letztere zur Ausfüllung der vorgedachten Vertiefungen dienen.

Je nachdem zur Ueberwältigung der Reibung die sich berührenden Körper über einander weggeschoben, auf einander gedreht oder über einander weggerollt werden müssen, unterscheidet man gleitende, drehende (Zapfenreibung) und rollende oder wälzende Reibung.

Beispiele der gleitenden Reibung finden sich bei der Bewegung eines Gerinnschützens in den Seitenführungen desselben, bei der Bewegung eines Pumpen- oder Dampfkolbens an den Wänden des Stiefels oder Cylinders. Beispiel der drehenden und rollenden Reibung zugleich bei den Wagenrädern, indem durch die Bewegung der Nabelflächen um die Axen drehende und durch die Bewegung der Radschinen auf dem Erdboden, Pflaster u. s. f. rollende Reibung erzeugt wird.

§. 69.
Gleitende Reibung.

Zahlreiche und höchst sorgfältig angestellte Versuche, besonders neuerdings durch den französischen Artillerie-Capitain Morin*), gestatten, über die gleitende Reibung folgende Gesetze aufzustellen:

1. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.
2. Die Reibung ist unter sonst gleichen Umständen dem Drucke proportional.
3. Bei gleichem, nicht allzu geringem Drucke ist unter übrigens gleichen Umständen die Größe der Reibung unabhängig von der Größe der berührenden oder sich reibenden Fläche, so daß dabei die Adhäsion nicht in Betracht kommt. Bei sehr geringen Pressungen, wie sie etwa in den Mechanismen der Taschenuhren vorkommen, findet jedoch dieser Satz nicht vollständige Anwendung, ebenso nicht, wenn die eine oder andere der sich berührenden Flächen als linear zu betrachten ist.
4. Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung. Reibung der Ruhe findet aber statt, wenn die Körper einige Zeit in Ruhe gewesen sind, bei'm Beginnen der Bewegung; Reibung der Bewegung während der Bewegung der Körper auf einander.

---

*) Nouvelles expériences sur le frottement, faites à Metz en 1831, 1832, 1833, imprimées par ordre de l'Académie des sciences. — 1834, chez Mathias, libraire, à Paris.

Die vollständigste Zusammenstellung und Kritik der vorzüglichsten bis jetzt vorgenommenen Reibungsversuche giebt Brix im sechszehnten Jahrgange (1837) der Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen.

Um die Größe der gleitenden Reibung in Rechnung zu bringen, sei Q der Normaldruck und P die zur Ueberwindung der Reibung nach der Richtung der Tangente der reibenden Flächen anzubringende Kraft, für einen anderen Normaldruck $= q$, bei derselben Materie unter gleichen Umständen die erforderliche Kraft $= p$. Nach dem zweiten der eben angegebenen Sätze erhält man aber dann die Proportion

$$P : p. = Q : q \text{ und}$$

$$P = \frac{p}{q} . Q.$$

Der Quotient $\frac{p}{q}$, das Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck von der Gewichtseinheit soll in der Folge der Reibungscoefficient genannt und mit f bezeichnet werden, so daß man erhält

$$\text{I.} \quad P = f . Q;$$

d. h. man findet die Größe der gleitenden Reibung, wenn man den Normaldruck mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt.

Zur Erleichterung vorkommender Rechnungen mag hier eine Tabelle der Reibungscoefficienten für die am meisten vorkommenden Materien folgen, die aus den Morin'schen Versuchen entnommen ist*).

Anmerkung. In nachstehender Tabelle bedeutet das Zeichen (=), daß die Holzfasern bei'm Gleiten parallel, und (+), daß die horizontal liegenden Fasern des gleitenden Körpers auf der Richtung der Bewegung senkrecht waren; (⊥) bedeutet, daß sich Hirnholz auf Langholz nach der Richtung der Fasern bewegte.

Reibende Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberfläche (Schmiere)	Reibungscoefficient für die Ruhe	Reibungscoefficient für die Bewegung
Eiche auf Eiche	(=)	trocken	0,62	0,48
	(=)	trockene Seife	0,44	0,16
	(+)	trocken	0,54	0,34
	(+)	mit Wasser benetzt	0,71	0,25
	(⊥)	trocken	0,43	0,19

*) Die Normalpressungen, unter welchen Morin die Versuche über gleitende Reibung anstellte, überstiegen nicht 2 Kilogramm pr. Quadratcentimeter der Berührungsflächen. Für manche Fälle der Anwendung dürfte es zu bedauern sein, daß die Versuche nicht auch auf größere Pressungen ausgedehnt wurden.

6

Reibende Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberfläche (Schmiere)	Reibungscoefficient	
			für die Ruhe	für die Bewegung
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche	(=)	trocken	0,57	0,36—0,40
Rindsleder auf Eiche	flach (=)	desgl.	0,61	0,51
	hochkantig	desgl.	0,43	0,33
		mit Wasser benetzt	0,79	0,29
Schwarz zugerichtetes Leder (Riemen)	(=)	trocken	0,74	0,27
Hanfgurte auf Eiche	(=)	desgl.	0,64	0,52
Hanfseil auf Eiche	(=)	desgl.	0,80	0,52
Schmiedeeisen auf Eiche	(=)	mit Wasser benetzt	0,65	0,26
	(=)	Talg	0,11	0,08
Gußeisen auf Eiche	(=)	trocken	—	0,49
		mit Wasser benetzt	0,65	0,22
		trockene Seife	—	0,19
Messing auf Eiche	(=)	trocken	0,62	—
Rindsleder als Kolbenlinderung auf Gußeisen	(flach)	mit Wasser benetzt	0,62	—
		mit Oel, Seife oder Schweinfett	0,12	—
Lederne Riemen auf gußeisernen Rollen	(flach)	trocken	0,28	—
		mit Wasser benetzt	0,38	—
Gußeisen auf Gußeisen	. . .	etwas fettig	0,16	0,15
		mit Wasser benetzt	—	0,31
Schmiedeeisen auf Gußeisen	. . .	trocken	0,19	0,18
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	. . .	desgl.	0,13	—
Gußeisen auf Bronze	. . .	desgl.	—	0,15
Schmiedeeisen auf Bronze	. . .	desgl.	—	0,17
Bronze auf Bronze	. . .	desgl.	—	0,20
Bronze auf Gußeisen	. . .	desgl.	—	0,21
Bronze auf Schmiedeeisen	. . .	etwas fettig	—	0,16
Eiche, Ulme, Weißbuche, wilder Birnbaum, Gußeisen, Schmiedeeisen, Stahl und Bronze, gleitend auf einander und auf sich selbst	(=)	auf gewöhnliche Art geschmiert mit Talg, Schweinefett, Oel, Wagenschmiere etc.	0,11	0,07—0,08
		blos fettig	—	0,15
Rogenstein auf Rogenstein	. . .	ohne Schmiere	0,74	0,64
Muschelkalk auf Rogenstein	. . .	„ „	0,75	0,67
Ziegelstein auf Rogenstein	. . .	„ „	0,67	0,65

Reibende Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberfläche (Schmiere)	Reibungscoefficient	
			für die Ruhe	für die Bewegung
Eiche auf Rogenstein	(⊥)	ohne Schmiere	0,63	0,38
Schmiedeeisen auf Rogenstein	parallel	„ „	0,49	0,69
Muschelkalk auf Muschelkalk	. . .	. . . .	0,70	0,38
Rogenstein auf Muschelkalk	. . .	. . . .	0,75	0,65
Ziegelstein auf Muschelkalk	. . .	. . . .	0,67	0,60
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	. . .	. . . .	0,42	0,24
Eiche auf Muschelkalk	(⊥)	. . . .	0,64	0,38
Rogenstein auf Rogenstein		Mit Mörtel aus drei Theilen feinen Sand und einem Theile hydraulischen Kalk	0,74	—

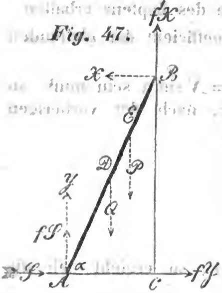
Beispiele.

1. Wie groß ist die Reibung der Bewegung bei einem gußeisernen Sägegatter, dessen Gewicht 40 Kilogramme beträgt, welches in horizontalen Führungen oder Ballnen von Bronze läuft und wenn Schweinefett als Schmiere gebraucht wird?

Hier ist $Q = 40$, $f = 0{,}07$, daher die Reibung
$P = 0{,}07 \,.\, 40 = 2{,}8$ Kilogramme.

2. Es sei AB Fig. 47 ein gleich starker Dachsparren, der sich bei A auf eine feste, horizontale Unterlage AC stützt, auch daselbst gehörig verzapft ist, bei B aber, in vertikaler Ebene, sich gegen eine Wand BC lehnt; man soll die Horizontalpressungen $= S$ und X bei A und B und den Vertikaldruck $= Y$ bei A mit Beachtung der Reibungen angeben.

Fig. 47.



Die Länge des Sparrens AB sei $= l$, das in der Mitte D desselben wirkende Gewicht $= Q$. In der Entfernung $AE = c$ sei außerdem ein Gewicht $= P$ aufgehangen, $\angle BAC = \alpha$, die Reibungscoefficienten bei A und B respective f und f'.

Nach §. 18. und §. 31. lassen sich unmittelbar folgende 3 Gleichungen bilden, wobei A zum Momentenpunkte gewählt ist:

$$S + fY - X = 0;$$

$$P + Q - Y - f'X - fS = 0;$$

$$\frac{Q}{2} \,.\, l \cos\alpha + Pc \,.\, \cos\alpha - Xl \sin\alpha - f'Xl \cos\alpha = 0.$$

Hieraus sind aber S, X und Y leicht zu reduciren *).

*) Es darf jedenfalls der Selbstübung überlassen werden, vorstehende Aufgabe mittels Zuziehung der Kräftepaare, so wie mehrere der früheren Aufgaben, namentlich der in §. 32. und §. 37. mit Beachtung der Reibung noch einmal zu lösen.

§. 70.

Drehende oder Zapfen-Reibung.

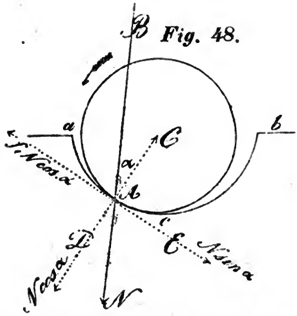


Fig. 48.

Es sei *C* Fig. 48. der Mittelpunkt des Zapfens irgend einer Radwelle, welcher sich bei der Bewegung der letzteren in dem Lager oder der Pfanne *abc* nach der Richtung des angegebenen Pfeiles dreht, ferner *AB* die Richtung der Mittelkraft $= N$ aller Kräfte, welche auf den Zapfen wirken.

Wäre die Lagerfläche *acb* horizontal, so würde der Zapfen eine drehende fortschreitende Bewegung annehmen; da dieß aber nicht der Fall ist, so wird er längs der krummen Fläche *bca* aufsteigen und zwar bis zu einer solchen Höhe, wo die Tangentialseitenkraft *AE* der Mittelkraft *N*, der aus der Normalseitenkraft *AD* entspringenden Reibung das Gleichgewicht zu halten vermag, oder die Tangentialkraft gleich und entgegengesetzt der Reibung wirkend angenommen werden kann.

Setzt man den Winkel $BAC = \alpha$, so wird man die Größe der Reibung $= P$ tangential am Umfange des Zapfens erhalten

(1) $P = f \,.\, N \,.\, \cos\alpha$, wo f der Coefficient der gleitenden Reibung ist.

Da ferner die Tangentialkraft $AE = N \sin\alpha$ sein muß, so folgt für die Bestimmung des Winkels α, nach der vorherigen Annahme die Gleichung

$$f N \cos\alpha = N \sin\alpha;\,^{*)}$$

$$tg\,.\,\alpha = f;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Setzt man aber diesen Werth in (1), so ergiebt sich die Zapfenreibung zu

---

*) Es möchte nicht ohne Nutzen sein, aufmerksam zu machen, daß die Richtung von *N* nicht durch den Mittelpunkt *C* des Zapfens gehen kann, sobald noch eine Drehung des letzteren statt finden soll. Mit Zuziehung der Kräftepaare läßt sich dies (vielleicht einsichtsvoller) ebenfalls nachweisen. Denn versetzt man *N* parallel zu sich selbst nach *C*, so ergiebt sich gleichzeitig ein Paar, dessen Drehungsmoment $Nr \sin\alpha$ ist etc.

$$P = \frac{f \cdot N}{\sqrt{(1+f^2)}}; \text{ oder}$$

$$\text{I. } P = f_1 N, \text{ wenn } \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1 \text{ gesetzt wird.}$$

Um daher die Größe der Zapfenreibung zu bestimmen, genügt es nicht, den Normaldruck mit dem Reibungscoefficienten f der gleitenden Reibung zu multipliciren, sondern es ist dieß Product noch durch $\sqrt{1+f^2}$ zu dividiren.

Wird der Zapfenradius mit ϱ bezeichnet, so muß das Moment der Reibung, auf die Drehaxe C bezogen, sein

$$\text{II. } P\varrho = \varrho f_1 N.$$

Ist der Zapfen unbeweglich und dreht sich dafür das Lager, oder irgend ein hohler Cylinder als solches, um denselben, so kann dieß nur die Formel II. und zwar insofern abändern, als in derselben statt des Zapfenradius $= \varrho$ der Radius der Lagerpfanne in Rechnung zu bringen ist.

Aus Allem folgt aber, daß die Zapfenreibung ebenfalls dem Normaldruck proportional, jedoch kleiner als die gleitende Reibung ist, was auch mit den Versuchen übereinstimmt, die überdieß lehren, daß alle sonstigen für die gleitende Reibung aufgestellten Erfahrungssätze auch hier anwendbar sind.

Anmerkung. Die Reibung fällt größer aus, wenn man den Zapfen, statt wie im Vorstehenden in einer cylindrischen Pfanne, in einer prismatischen Pfanne laufen läßt *). Das eigenthümliche Klemmen, welches manche neue Zapfen zeigen, wenn sie in gegossenen Pfannen laufen, ist in der fehlerhaften Ausführung der letzteren begründet und kann kein Gegenstand mathematischer Untersuchungen werden.

§. 71.

Sorgfältige ebenfalls von Morin angestellte Versuche über Zapfenreibung haben den Coefficienten f_1 für verschiedene Materien so finden lassen, wie aus nachstehender Tabelle zu entnehmen ist.

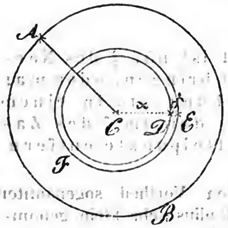
*) Man sehe hierüber das §. 12. citirte Werk Poncelets, Sect. III. p. 36.

Reibende Körper	Zustand der Oberflächen	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: auf gewöhnliche Art	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: ununterbrochen
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	0,054
	mit denselben Schmieren naß	0,08	,,
	mit Asphalt	0,054	,,
	fettig	0,14	,,
	fettig und naß	0,14	,,
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	0,054
	fettig	0,16	,,
	fettig und naß	0,16	,,
	sehr wenig fettig	0,19	,,
	ohne Schmiere	0,18	,,
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Franzosenholz (Guajakh.)	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	,,	0,090
	fettig von Oel od. Schweinefett	0,10	,,
	fettig von Schweinefett und Graphit	0,14	,,
Zapfen von Schmiedeeisen auf gußeisernen Lagern	geschmiert mit Olivenöl, Talg, Schweinefett oder Schweinefett und Graphit	0,07—0,08	0,054
Zapfen von Schmiedeeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett oder Talg	0,07—0,08	0,054
	geschmiert mit fester Wagenschmiere	0,09	,,
	fett und naß	0,19	,,
	sehr wenig fett	0,25	,,
Schmiedeeiserne Zapfen auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	0,11	,,
	bloß fettig	0,19	,,
Zapfen von Bronze auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Oel	0,10	,,
	geschmiert mit Schweinefett	0,09	,,
Zapfen von Bronze auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Oel oder Talg	0,09	0,045 bis 0,052
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Schweinefett	0,12	,,
	bloß fettig	0,15	,,
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Schweinefett	,,	0,07

§. 72.

In vielen Fällen werden die Zapfen auch in der Richtung ihrer Axen gegen die Grundfläche gedrückt, wodurch ebenfalls Reibung entstehen muß, die sich wie nachstehend berechnen läßt.

Fig. 49.



Es sei ABC Fig. 49. die kreisförmige Grundfläche des Zapfens, $CA = \varrho$ dessen Radius und über die ganze Fläche gleichmäßig der Druck $= Q$ verbreitet. Die ganze Fläche denke man sich durch concentrische Kreise in Elemente getheilt, deren gegenseitige Entfernung gleich, aber unendlich klein $= \delta$ ist.

Ist dann der Radius CD eines solchen Kreises $= x$, $DE = \delta$, so wird der Inhalt des Ringes DEF sein:

$$2 \delta\, x \,.\, \pi.$$

Da ferner der Druck auf die ganze Fläche vom Inhalte $\varrho^2 \pi = Q$ ist, so muß auf den Elementarring kommen

$$\frac{2 \delta\, x\, \pi}{\varrho^2 \pi} \cdot Q = \frac{2 \delta \,.\, x}{\varrho^2} \cdot Q;$$

Deshalb wird aber die Größe der Reibung des Ringes sein, wenn f den Coefficienten der gleitenden Reibung bezeichnet

$$f \cdot \frac{2 \delta \,.\, x}{\varrho^2} \cdot Q,$$

so wie das Moment der Reibung am Hebelarme $= x$ auf die Drehaxe C bezogen

$$(1)\; f \cdot \frac{2 \delta \cdot x^2}{\varrho^2} \cdot Q.$$

Derselbe Ausdruck wird sich für die Momente aller Elementarringe ergeben, weshalb man dann das Moment der ganzen Fläche erhalten muß, wenn man in (1) für x auf einanderfolgend $1\,\delta$, $2\,\delta$, $3\,\delta \ldots n\delta$ setzt und diese Werthe addirt. Es muß also sein, wenn P die zur Ueberwindung der Reibung nöthige Kraft bezeichnet,

$$P \cdot \varrho = f \cdot \frac{2 \delta}{\varrho^2} \cdot Q\,(1^2 \delta^2 + 2^2 \delta^2 + 3^2 \delta^2 + \ldots\ldots);$$

$$P \varrho = f \cdot \frac{2 \delta^3}{\varrho^2}\, Q\,(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots).$$

Für unendlich viel Glieder der hier erhaltenen Reihe findet man nach §. 50:

$$P\varrho = f \cdot \tfrac{2}{3} \frac{(n\delta)^3}{\varrho^2}.$$

Da aber für die ganze Fläche $n\,\delta = \varrho$ sein muß, so folgt

$$P\varrho = f \cdot \frac{2\,Q}{\varrho^2} \cdot \tfrac{1}{3}\,\varrho^3;$$

$$\text{I. } P\varrho = f \cdot \tfrac{2}{3}\,\varrho \cdot Q, \text{ d. h.}$$

für den vorstehenden Fall ist nur $\frac{2}{3}$ des Normaldrucks in Rechnung zu bringen, oder man kann sich die ganze Reibung als in einem Punkte vereinigt denken, der um $\frac{2}{3}$ des Zapfenradius von dessen Mittelpunkte entfernt ist.

Hieraus erkennt man zugleich den Vortheil sogenannter Spitzzapfen, da bei diesen der mittlere Radius sehr klein genommen werden kann, was jedoch praktisch seine Grenzen haben muß, indem sonst ein Einreiben des Zapfens in die Lagerfläche unvermeidlich ist.

Zusatz 1. Bildet die Zapfenfläche einen concentrischen Ring, dessen Radien respective ϱ und ϱ' sind (die Breite der Ringfläche also $\varrho - \varrho'$ ist), so erhält man, ähnlich wie vorher, die Momentengleichung

$$P(\varrho^2 - \varrho_1^2) = \tfrac{2}{3} f(\varrho^3 - \varrho_1^3)\,Q, \text{ folgl.}$$

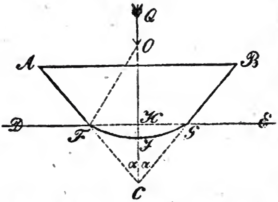
$$P = \tfrac{2}{3} f \frac{\varrho^2 + \varrho\varrho_1 + \varrho_1^2}{\varrho + \varrho_1}\,Q.$$

Zusatz 2. Eine eigenthümliche Art von Zapfenreibung veranlassen die sogenannten schneidigen Zapfen, welche man bei Probir-Krämer-Brücken-Wagen u. s. w. fast allgemein anwendet. Da dies zugleich eine Gelegenheit bietet, über die früher erwähnte lineare Reibung einigen Aufschluß zu geben, so mag die Betrachtung dieses Gegenstandes hier noch Platz finden.

Da die direkten Versuche über Reibung schneidiger Zapfen gehörige Anhaltepunkte zur Aufstellung einer geeigneten Theorie nicht bieten, so muß man letztere auf eine der Natur der Sache genügende Hypothese basiren. Am meisten der Erfahrung entsprechend scheint es in dieser Hinsicht zu sein, daß man von der Abnutzung ausgeht, welche nach und nach Schneide und deren Unterlage (Pfanne) vermöge des auf ihnen lastenden Druckes erfahren, und daß man ferner dabei gedachte Volumenänderung dem Drucke und dem Elasticitäts- und Cohäsionswiderstande des angewandten Materiales proportional annimmt *).

*) Man sehe Weisbach's Abhandlung über die Reibung schneidiger Zapfen im polytechn. Centralblatte. 1840. S. 1063.

Fig. 50.



Dies vorausgesetzt stelle *ABC* Fig. 50 den Querschnitt eines schneidigen Zapfens, *C* dessen Schneide und *DE* die Pfanne dar. Vermöge der gedachten Abnutzung habe aber nach irgend einer Zeit der Zapfen die Gestalt *AFJGB* und die Berührungsfläche der Pfanne die von *FJG* angenommen.

Ist sodann der auf Schneide und Pfanne wirkende Druck $= Q$ und *FO* der Krümmungshalbmesser der Curve *FJG*, so wird man für das Moment $= M$ der stattfindenden Reibung setzen können

$$(1)\ M = \mu . Q . \overline{FO},$$

wobei μ einen entsprechenden Erfahrungscoefficienten bezeichnet.

Um *FO* näher zu bestimmen, betrachten wir *FJG* als einen Parabelbogen, setzen $FG = a$, $HJ = h$ und $\angle ACH = \angle HCB = \alpha$. Sodann ist zuerst nach geometrischen Sätzen $FO = \frac{a^2}{8h}$ *), folgl:

$$(2)\ M = \mu . Q \frac{a^2}{8h}.$$

Es bleibt nunmehr noch übrig a und h auf geeignete Weise zu bestimmen, was nach Obigen, wie folgt, geschehen kann.

Es ist, wenn l die Länge der Schneide C bezeichnet, der Inhalt von *FJGH*: $\frac{2}{3} ahl$, der von *FCGJF*: $\frac{a^2}{2} l . cotg\, \alpha - \frac{2}{3} ahl$. Sind daher e und e_1 geeignete, dem Elasticitäts- und Cohäsionswiderstande des Materiales von Pfanne und Schneide entsprechende Coefficienten, so wird man setzen können:

$$Q = \tfrac{2}{3} e . ahl \text{ und } Q = e_1 \left(\frac{a^2}{2} l\, cotg\, \alpha - \tfrac{2}{3} ahl\right).$$

Hieraus reducirt man leicht:

$$a = 2 \sqrt{\frac{Q}{l} \cdot \frac{e + e'}{e e'} . tg\alpha},\quad h = \frac{3}{4e} \sqrt{\frac{Q}{l} \cdot \frac{e e'}{e + e'} . cotg\alpha}, \text{ weshalb}$$

dann folgt

$$\frac{a^2}{8h} = \tfrac{2}{3} e \sqrt{\frac{Q}{l} \cdot \left(\frac{e + e'}{e e'}\right)^3 . tg\alpha^3}, \text{ somit aus (2)}$$

$$M = \tfrac{2}{3} \mu . e \sqrt{\left(\frac{e + e'}{e e'}\right)^3} \cdot \sqrt{\frac{Q^3}{l} . tg\alpha^3}.$$

---

*) Die Gleichung der gemeinen Parabel ist bekanntlich $y^2 = px$, $p = \frac{y^2}{x}$; der Krümmungshalbmesser am Scheitel $= \frac{y^2}{2x} (= \frac{1}{2} p)$, d. i. nach obiger Bezeichnung: $\frac{a^2}{8h}$.

Setzt man hier endlich $\frac{2}{3}\mu\, e \sqrt{\left(\frac{e+e'}{e e'}\right)^3} = \varphi$, d. h. einem überhaupt durch geeignete Versuche zu ermittelnden Coefficienten gleich, so ergiebt sich

$$M = \varphi \sqrt{\frac{Q^3}{l} \cdot tg\alpha^3}, \text{ d. h.}$$

das Moment der Reibung schneidiger Zapfen wächst mit der $\frac{3}{2}$ Potenz des Druckes und $\frac{3}{2}$ Potenz der Tangente vom halben Winkel der Schneide und im umgekehrten Verhältnisse der $\frac{1}{2}$ Potenz der Länge der Schneide.

Vorstehender allgemeiner Satz verdient um so mehr Vertrauen, als er mit einem von Culomb für das Reibungsmoment eines harten Körpers auf der ebenfalls harten Spitze eines Kegels den Umständen entsprechende Aehnlichkeit hat. Culomb fand nämlich für gedachten Fall $M = \varphi \sqrt[3]{Q^4}$, ein Resultat, was auch mit direkt angestellten Versuchen übereinstimmte *). Bei letzteren ergaben sich zugleich folgende Sätze, die mehr oder weniger auch auf schneidige Zapfen anzuwenden sein werden:

1) daß für eine mittlere Belastung der vortheilhafteste (ganze) Winkel an der Kegelspitze 30 bis 40 Grad beträgt und daß derselbe bei sehr geringen Belastungen sogar bis auf 12 Grad reducirt werden kann.
2) Die Reibung des Granates (als Hütchen auf gehärteter Stahlspitze) ist am geringsten; dann folgen der Ordnung nach Achat, Bergkrystall, Glas und Stahl.

§. 73.

Rollende oder wälzende Reibung.

Der Widerstand, welcher beim Fortrollen eines Kreiscylinders auf einer horizontalen Ebene auftritt, wird zwar, wie bereits bemerkt, auch Reibungswiderstand genannt, allein es dürfte an sich einleuchten, daß hierbei, genau genommen, von einer Reibung im Sinne der gleitenden und drehenden Reibung, eigentlich nicht die Rede sein kann. Bei der Herleitung mathematischer Ausdrücke für diesen Widerstand ist man daher auch sehr oft von ganz besonderen Hypothesen ausgegangen, die im Allgemeinen jenen analog sind, welche wir bei der Berechnung der Reibung schneidiger Zapfen zu Grunde legten **). Indeß scheinen die hierbei gewonnenen Resultate mit den Erfahrungen nicht übereinzustimmen, welche besonders neuerdings aus Versuchen vom größten Umfange, die Morin anstellte ***), gewonnen wurden.

---

*) Der bereits §. 69. citirte Band der Berliner Verhandlungen etc. S. 342.

**) Gerstner, Handbuch der Mechanik. Bd. 1. S. 582. — Brix, Berliner Verhandlungen. Bd. 17. S. 87.

***) Expériences sur le tirage des voitures etc.; par A. Morin, Paris, 1842.

Für die Praxis dürfte es aber vorzuziehen sein, sich (vorerst) an letztere zu halten.

Uebereinstimmend mit früheren Versuchen Culombs fand auch Morin, »daß unter sonst gleichen Umständen der Widerstand, welcher der (horizontale) Boden darüber rollenden Cylindern oder Rädern entgegensetzt, der Belastung (dem Drucke) direkt und den respectiven Halbmessern umgekehrt proportional ist.

Setzt man daher die Halbmesser zweier verschiedener Räder R und R', die respectiven Belastungen P und P', ferner die Widerstände, welche der Boden gegen das Fortrollen der Räder im Umfange derselben entgegenstellt W und W', so folgt:

$$W : W' = \frac{P}{R} : \frac{P'}{R'},$$

so wie wenn man $\frac{W' R'}{P'}$ als durch Versuche bekannt annimmt und $= \mu$ setzt

$$\text{I.} \quad W = \mu \, . \, \frac{P}{R}.$$

Bei Eichenholzbahnen fand Culomb (wenn P in Kil, R in Metern ausgedrückt wird):

für Walzen aus Guajakholz $\mu = 0{,}00194$,
» » » Ulmenholz $\mu = 0{,}00324$.

Bei Eisenbahnen und für Räder von $34\frac{1}{2}$ Zoll (engl.) Durchmesser mit schmiedeeisernen Kränzen berechnete Pambour nach Wood's Versuchen: $\frac{\mu}{R} = 0{,}00032$.

Aus Morin's Versuchen lassen sich für einzelne Räder anwendbare Resultate nicht entnehmen, da solche für vollständige Straßenfuhrwerke unternommen wurden.

Vorstehende Werthe reichen jedoch hin, um zu erkennen, wie höchst gering die rollende gegenüber der gleitenden und drehenden Reibung ist.

Zusatz 1. Bei Rädern, welche um eine Axe drehbar sind, kommt für den Gesammtwiderstand zum Fortbewegen in horizontaler Richtung noch die Axenreibung in Betracht. Bezeichnet daher P die Gesammtbelastung der Radaxen oder Radnaben, p das Gewicht der auf einerlei Axe steckenden Räder (bei Eisenbahnfuhrwerken, wo die Räder auf den Axen festgekeilt sind, das Gewicht von Axe und Rad), ϱ den Axen- oder Naben-Halbmesser, so erhält man für eine tangentiel am Radumfange wirkende Kraft $= F$ zur Ueberwältigung dieser Widerstände, wenn übrigens die früheren Bezeichnungen beibehalten werden,

$$(1)\ F = \mu \cdot \frac{P+p}{R} + f' \frac{\varrho}{R} \cdot P\ ^{*)}.$$

Bei Eisenbahnfuhrwerken drückt man den Gesammtwiderstand F gewöhnlich als Theil der Totalbelastung $(P+p)$ aus, so daß aus (1) wird:

$$F(P+p) = \mu \frac{P+p}{R} + f' \frac{\varrho}{R} \cdot P;$$ oder weil hier p nahezu $\frac{1}{6}(P+p)$ ist, auch

$$F = \frac{\mu}{R} + \tfrac{5}{6} f' \frac{\varrho}{R},$$ wobei natürlich R im ersten Gliede in dem Maße ausgedrückt werden muß, wofür μ bestimmt wurde.

Mit Zuziehung des bereits für $\frac{\mu}{R}$ angegebenen Werthes und für $f' = 0{,}054$ (nach der Tabelle §. 71), folgt daher, wenn das gedachte R in engl. Zollen ausgedrückt wird:

$$F = 0{,}00032\ \frac{17{,}25}{R} + 0{,}045\ \frac{\varrho}{R}.$$

Für $R = 18$ Zoll und $\varrho = 0{,}937$ Zoll, folgt $F = 0{,}00265 = \frac{1}{376}$ der Gesammtbelastung. Um daher das Gewicht einer engl. Tonne = 2240 ℔ engl. auf horizontaler (gerader) Eisenbahnstrecke fortzuschaffen, sind 5,98 ℔ Zugkraft erforderlich, was auch sehr gut mit den direkten Versuchen Pambour's übereinstimmt, sobald man vom Luftwiderstande absieht.

Zusatz 2. Aus dem Vorstehenden erhellt zugleich der Nutzen sogenannter Laufrollen, um gleitende Reibung in drehende und rollende zu verwandeln. Eben so läßt sich die Zapfenreibung einer Welle bedeutend vermindern, wenn man den Zapfen auf dem Kranze einer (oder auch mehrerer) sogenannter Friktionsrollen laufen läßt. Denn ist R der Halbmesser eines in der Richtung des Druckes N unter dem Wellzapfen angebrachten Friktionsrades, r der Axenhalbmesser des letzteren, so ist die Zapfenreibung des Friktionsrades auf den Umfang desselben reduzirt. $f' \frac{r}{R} N$. Die rollende Reibung zwischen Wellzapfen und dem Kranze des Friktionsrades, kann ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt werden. Ohne Friktionsrad wäre die Zapfenreibung: $f' N$**).

---

*) Für die absolute Ermittelung der Zugkraft bei gewöhnlichem Straßenfuhrwerke kann diese Gleichung nicht dienen, da die Umstände, welche dabei außerdem in Betracht gezogen werden müßten, zu verschiedenartig sind, als daß sich ein einigermaßen richtiges Resultat erwarten ließe. Anders ist dies bei Eisenbahnen, wo alle Constructions- und sonstigen Verhältnisse mehr Gleichförmigkeit darbieten.

**) Bei obiger Rechnung ist indeß die Reibung des Wellzapfens vernachlässigt, die derselbe an den Seitenrollen oder Backen hervorruft, welche man, zur Vermeidung seines Ablaufens vom Friktionsrade (wenn nur ein einziges vorhanden ist) anbringen muß.

Fünftes Kapitel.

Von den einfachen Maschinen.

§. 74.

Mit dem Namen Maschinen bezeichnet man Vorrichtungen, mittels welcher Kräfte eine Wirkung äußern, verschieden von derjenigen, welche sie ohne dieselben geäußert haben würden. Aus dieser ganz allgemeinen Erklärung folgt, daß die Maschinen mancherlei Anwendung zulassen; hier soll indeß nur betrachtet werden, inwiefern mittels derselben Kräfte durch Abänderung ihrer Richtung und Größe ein Gleichgewicht zu erzeugen vermögen.

Eine Maschine, wovon kein Bestandtheil selbst wieder Maschine ist, heißt einfach, im entgegengesetzten Falle zusammengesetzt. Zu den einfachen Maschinen zählt man aber die Seilmaschine, den Hebel, die Rolle, das Wellrad, die schiefe Ebene, die Schraube und den Keil *).

Die Seilmaschine.

§. 75.

Eine Verbindung von Seilen oder Fäden unter einander, mittels Knoten, an welcher auf irgend eine Weise Kräfte wirken, wird eine Seilmaschine genannt. Unter Knoten versteht man aber den Vereinigungspunkt zweier oder mehrer Seile, und der Knoten heißt fest, wenn er durch keine Kraft aus seiner Lage gebracht werden kann, lose oder beweglich, wenn er längs eines andern Seiles, wie ein Ring, verschiebbar ist.

In den folgenden Untersuchungen nehmen wir die Seile als völlig biegsam, unausdehnbar und gewichtlos an.

Hat man ein Seil von beliebiger Länge, und sind an dessen Ende, sowie an mehreren Punkten desselben Kräfte angebracht, so bildet im Gleichgewichte das ganze Seil eine gebrochene Linie, die entweder in einer oder mehreren Ebenen liegt. Eine solche Verbindung nennt man insbesondere Seil-Polygon.

§. 76.

Wirken zunächst zwei gleiche Kräfte P und Q in entgegengesetzter Richtung an einem Seile, so muß nach dem Frühe-

*) Genau genommen giebt es nur drei einfache Maschinen, nämlich Seilmaschine, Hebel und schiefe Ebene, weil, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, alle übrigen auf diese drei zurückgeführt werden können.

ren Gleichgewicht vorhanden sein; dasselbe wird ferner noch bestehen, wenn das Seil durch einen festen Ring geht, in welchem es sich ungehindert fortbewegen kann, und wenn ein Theil des Seiles, an welchem P wirkt, einen Winkel mit dem Theile desselben bildet, an welchem Q thätig ist. Ist eines der Seilenden, z. B. das, woran Q wirkt, fest, so wird der feste Punkt in der Richtung des Seilendes von P gezogen, und eine eben so große unbekannte Kraft ist dann als Spannung dieses Seilendes in Rechnung zu bringen.

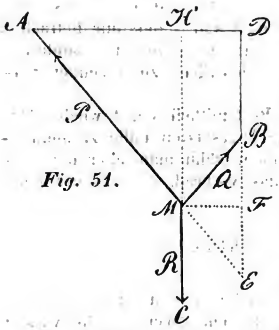


Fig. 51.

Wirken drei Kräfte P, Q und R an den Seilenden A, B und C Fig. 51, die bei M in einem Knoten vereinigt sind, so sind diese für den Zustand des Gleichgewichts den früher gefundenen Bedingungen solcher Kräfte unterworfen, welche einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben. Es müssen demnach die Richtungen der drei Kräfte in einer Ebene liegen, so wie ferner nach §. 12. die Proportion stattfinden

$$(1)\quad P : Q : R = \sin CMB : \sin CMA : \sin AMB.$$

Ist AMB ein einziges Seil, welches durch einen losen Knoten oder Ring M geht, so ist nach dem Obigen

$P = Q$, deshalb aber auch $\angle AMH = \angle HMB$, oder die Verlängerung von RM theilt den Winkel AMB in zwei gleiche Theile. Nimmt man daher an, die Seilenden A und B sind absolut festgemacht, ist ferner R ein Gewicht, so wird dasselbe vermöge des beweglichen Knotens oder Ringes eine solche Stellung einnehmen, daß die Richtungslinie CM den Winkel AMB halbirt.

Ist dann die Länge $AMB = l$ des Seiles gegeben, so läßt sich die Lage des Punktes M, sowie die Länge der Theile AM und BM leicht finden.

Zieht man nämlich DE vertikal, durchschneidet diese Linie von A aus mittels eines Kreisbogens vom Halbmesser $= l$ in einem Punkte E, theilt EB in zwei gleiche Theile und zieht endlich FM horizontal, so ist M der gesuchte Knotenpunkt *).

*) Beispiele hierzu bietet die Aufhängungsweise mancher Lampen, Straßenlaternen etc.

Sieht man ferner $AD = a$, $DB = b$ als gegeben an, so findet sich

$$BM = \frac{\frac{1}{2} l(\sqrt{l^2 - a^2} - b)}{\sqrt{l^2 - a^2}};\quad AM = \frac{\frac{1}{2} l(\sqrt{l^2 - a^2} + b)}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Außerdem ist

$$\sin AMH = \sin CMB = \sin CMA = \frac{a}{l};$$

$$\cos AMH = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l};\ \text{also}$$

$$\sin AMB = \sin 2\,AMH = \frac{2a\sqrt{l^2 - a^2}}{l^2}.$$

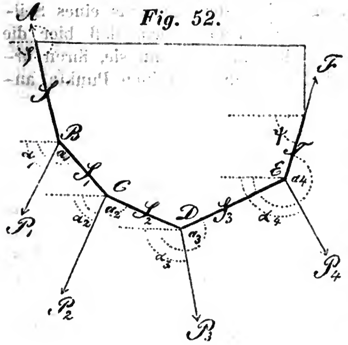
Setzt man aber letzteren Werth in (1), so folgt

$$P = Q = \frac{l}{2\sqrt{l^2 - a^2}} \cdot R;$$ hieraus ergiebt sich, daß die Spannung $P = Q$ um so größer ist, jemehr sich l dem a nähert und unendlich groß werden muß für $a = l$. Es ist daher unmöglich ein Seil völlig horizontal zu spannen, sobald nur das geringste Gewicht daran angebracht ist.

§. 77.

Es mag nun der mehr allgemeine Fall behandelt werden, in wiefern an einem Seilpolygon $ABCDEF$, welches sich in einer vertikalen Ebene befindet, Fig. 52, Gleichgewicht vorhanden sein kann, wenn dasselbe durch an den Endpunkten A und F und an andern Punkten oder Knoten B, D, C und E angreifende Kräfte gespannt wird.

Fig. 52.



Zu diesem Ende mögen P_1, P_2, P_3 und P_4, die an dem festen Knoten B, C, D und E wirkenden Kräfte, ferner α_1, α_2, α_3 und α_4, die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen derselben mit dem Horizonte, in gleichem Sinne von 0 bis 360 Grad gezählt, bilden. Ferner mögen die Spannungen zwischen je zwei aufeinander folgenden Knoten S, S_1, S_2, S_3 und T

sein, so wie deren Richtungswinkel mit dem Horizonte respective φ, a_1, a_2, a_3, a_4.

Soll nun Gleichgewicht am Seilpolygon stattfinden, so müssen die Spannungen und Kräfte an jedem einzelnen Knoten einander das Gleichgewicht halten.

Für den ersten Knoten B hat man nach §. 14

$$S \cos(180 + \varphi) + P_1 \cos \alpha_1 + S_1 \cos a_1 = 0;$$
$$S \sin(180 + \varphi) + P_1 \sin \alpha_1 + S_1 \sin a_1 = 0.$$

Für den zweiten Knoten C ebenso

$$S_1 \cos(180 + a_1) + P_2 \cos \alpha_2 + S_2 \cos a_2 = 0;$$
$$S_1 \sin(180 + a_1) + P_2 \sin \alpha_2 + S_2 \sin a_2 = 0.$$

Für den dritten Knoten D

$$S_2 \cos(180 + a_2) + P_3 \cos \alpha_3 + S_3 \cos a_3 = 0;$$
$$S_2 \sin(180 + a_2) + P_3 \sin \alpha_3 + S_3 \sin a_3 = 0.$$

Für den vierten Knoten E

$$S_3 \cos(180 + a_3) + P_4 \cos \alpha_4 + T \cos a_4 = 0;$$
$$S_3 \sin(180 + a_3) + P_4 \sin \alpha_4 + T \sin a_4 = 0.$$

Hierbei erkennt man zugleich, wie sich diese Bedingungsgleichungen für jede beliebige Zahl von Kräften und Spannungen fortsetzen lassen.

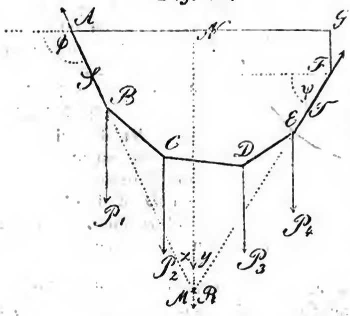
Addirt man aber die cosinuirten und eben so die sinuirten Werthe dieser Gleichungen für sich, bemerkt, daß Sinuse und Cosinuse im dritten Quadranten negativ sind, und setzt endlich statt a_4 den innern Nebenwinkel ψ desselben, so erhält man ganz allgemein

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 \ldots\ldots - S \cos \varphi - T \cos \psi = 0;$$
$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 \ldots\ldots - S \sin \varphi - T \sin \psi = 0.$$

Diese Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines Seilpolygons mit n Knoten, zeigen außerdem noch, daß hier die Kräfte dasselbe Gleichgewicht bedingen, als wenn sie, ihren ursprünglichen Richtungen parallel, alle an demselben Punkte angebracht worden wären.

§. 78.

Fig. 53.



Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 .... P_n, außer den Spannungen S und T Fig. 53, sämmtlich vertikal gerichtet, so ist in der allgemeinen Gleichung des vorigen §. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ etc. $= 90^0$ zu setzen, wodurch man erhält

$$S \cos \varphi + T \cos \psi = 0;$$
$$P_1 + P_2 + P_3 \ldots\ldots - S \sin \varphi - T \sin \psi = 0.$$

Werden jetzt die Richtungen der Seile AB und EF so weit verlängert, bis sie sich in einem Punkte M schneiden, bezeichnet man die Winkel, welche sie hier mit der senkrechten Linie MN bilden, mit x und y und führt diese statt φ und ψ in die vorstehenden Formeln ein, so erhält man nach gehöriger Reduction, wenn zugleich

$$P_1 + P_2 + P_3 \ldots\ldots = R \text{ gesetzt wird:}$$

$$(1)\ S = \frac{R \sin y}{\sin (x+y)};\quad (2)\ T = \frac{R \sin x}{\sin (x+y)}.$$

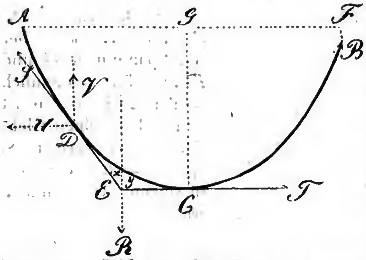
Hieraus folgt ferner die Proportion

$S : T : R = \sin y : \sin x : \sin (x+y)$, welche lehrt, daß MN die Richtung der Mittelkraft R ist und daß diese gefunden wird, sobald man die beiden Spannungen S und T als Seitenkräfte betrachtet und übrigens nach §. 12. verfährt.

§. 79.

Die Gleichungen des vorigen §. müssen jedenfalls dieselben bleiben, wie groß man sich auch die Anzahl der parallelen Kräfte, und wie klein man die Polygonseiten annehmen mag. Sieht man dann ferner die Kräfte als vertikal niederziehende Gewichte an, so bekommt man ein materielles, vollkommen biegsames, nicht ausdehnbares Seil oder eine Kette, und es bildet dieses Seil eine krumme Linie, die sogenannte Kettenlinie.

Fig. 54.



Um die besondern Eigenschaften dieser Linie kennen zu lernen, sei *ABC* Fig. 54. eine solche an den Punkten *A* und *B* aufgehangene Kette, deren tiefster Punkt *C* ist. Für ein beliebiges Stück *DC* derselben mögen die Spannungen *S* und *T* in den Endpunkten *D* und *C* gesucht und zu diesem Ende die Tangenten *DE* und *CE* gezogen werden, in deren Richtungen jene thätig sind.

Auf diese Weise ist aber ein Gleichgewicht des Curvenstückes *DC* möglich, ohne daß die übrigen Stücke *AD* und *BC* vorhanden sind.

Unmittelbar aus vorigem §. folgt sodann, indem man berücksichtigt, daß $\angle y = 90^0$ ist,

$$(1)\ S = \frac{R}{\cos . x};\quad (2)\ T = R\,tg . x.$$

Zerlegt man außerdem noch die Spannung *S* im Punkte *D* in eine horizontale Spannung $= U$ und in eine vertikale Spannung $= V$, so wird

$$(3)\ U = S . \sin x;\quad (4)\ V = S \cos x.$$

Aus dem Vergleiche von (1) und (4) folgt

$$\text{I.}\quad V = R.$$

Verbindet man ferner (1) mit (2), so erhält man

$T = S \sin x$, und demnach wegen (3)

$$\text{II.}\quad U = T.$$

Aus I. und II. ergeben sich aber jetzt folgende zwei wichtige Sätze:

Es ist die Vertikalspannung in jedem Punkte der Kettenlinie eben so groß, als das Gewicht der Kette von diesem Punkte bis zum Scheitel.

Die Horizontalspannung ist an allen Punkten der Kettenlinie dieselbe und zwar stets der im Scheitel gleich*).

---

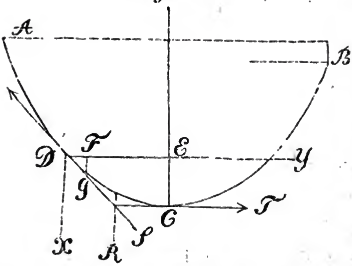
*) Wegen dieser Eigenschaft wird die Kettenlinie insbesondere für den Gewölbebau wichtig.

Eine fernere Eigenschaft der Kettenlinie, nämlich die, daß ihr Schwerpunkt, unter allen Linien, die zwischen denselben Endpunkten dieselbe Länge haben, am tiefsten liegt, mag hier blos historisch angeführt werden. Man sehe hierüber: Lehrbuch der Mechanik von Poisson, deutsche Bearbeitung von Dr. Stern, erster Theil, §. 296.

§. 80.

Um jetzt eine Gleichung für die geometrische Gestalt der Kettenlinie möglichst leicht zu finden, wollen wir annehmen, daß nicht gleiche Stücke der Kette, sondern gleiche Horizontalprojectionen derselben einerlei Gewicht haben, wie dieß gewöhnlich bei den sogenannten Ketten– und Drahtbrücken der Fall ist.

Fig. 55.



Als Ursprung eines rechtwinkeligen Coordinaten–Systems XY werde ein beliebiger Punkt D der Kettenlinie ACB, Fig. 55. angenommen und die Ordinatenaxe DY horizontal gedacht; ferner sei $DE = y$, $EC = x$. Die tangentiale Spannung im Punkte D sei $= S$, und der Neigungswinkel der Richtung derselben gegen die Abscissenaxe d. i. $\angle EDS = \alpha$, endlich sei p das Gewicht der Längeneinheit der Linie DE, die als Horizontal–projection des Kettenstückes DC anzusehen ist.

Nach vorigem §. ist

$$T = S \cos \alpha; \quad R = S \sin \alpha.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man

$$tg\,\alpha = \frac{R}{T},$$

und weil nach obiger Annahme py das Gewicht R des Kettenstückes DC sein muß, so folgt ferner

$$(1) \quad tg\,\alpha = \frac{py}{T}.$$

Nimmt man nun auf DE ein sehr kleines Stück DF an und errichtet die Normale FG, so daß DFG als geradliniges Dreieck angesehen werden kann, so ist

$$tg\,\alpha = \frac{FG}{DF}.$$

Setzt man diesen Werth in (1), so folgt

$$\frac{FG}{DF} = \frac{py}{T};$$

$$(2) \quad FG = \frac{py}{T} \cdot DF.$$

Theilt man jetzt die Ordinate DE in n gleiche Theile, so daß jeder gleich $DF = \delta$ ist, errichtet in den Theilpunkten Nor–

malen, die bis zur Curve DC reichen, zieht ferner von hieraus Parallelen zu DE und setzt in (2) für y auf einander folgend 1δ, 2δ, $3\delta \ldots . n\delta$ so wird die Summe der erhaltenen Werthe die Abscisse x geben. Es ist also

$$x = \frac{p}{T} \cdot \delta\,(1\delta + 2\delta + 3\delta + 4\delta \ldots .);$$

$$x = \frac{p\,\delta^2}{T}\,(1 + 2 + 3 + 4 \ldots .).$$

Hieraus nach §. 50:

$$x = \frac{p}{2T} \cdot (n\delta)^2,$$

oder, weil $n\delta = y$ sein muß,

$$x = \frac{p}{2T} \cdot y^2, \text{ und}$$

$$\text{I. } y^2 = \frac{2T}{p} \cdot x.$$

Aus letzterer Gleichung folgt, daß bei obiger Annahme die Kettenlinie eine Parabel bildet, deren Parameter

$$\frac{2T}{p} \text{ ist*)}.$$

Zu demselben Resultate würde man auch ohne die gedachte Voraussetzung gelangt sein, wären die Aufhängepunkte der Kette sehr weit von einander abstehend angenommen worden.

Zusatz. Bezeichnet h die halbe Sehne eines parabolischen Kettenbogens, f dessen Pfeilhöhe, so erhält man aus I. für die Horizontalspannung $= T$:

II. $T = \frac{ph^2}{2f}$, welches zugleich die Kraft ist, womit bei Kettenbrücken die Landpfeiler zum Umwerfen veranlaßt werden.

Für die tangentiale Spannung $= S$ am Aufhängepunkte der Kette erhält man, wegen $S = \frac{T}{\cos\alpha} = T\sqrt{1 + tg\alpha^2}$, ferner $tg\alpha = \frac{ph}{T}$,

III. $S = \frac{ph}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2}$; so wie endlich aus I.

$$\text{IV. } y^2 = \frac{h^2}{f} \cdot x \text{ **)}.$$

---

*) Die Ableitung der Gleichung für die Kettenlinie ohne die erwähnten Annahmen, für den allgemeinsten Fall und ohne Differenzial- und Integralrechnung dabei in Anwendung zu bringen, findet man in Kaiser's „Handbuch der Statik" Carlsruhe 1836.

**) Die Länge $= s$ des ganzen Kettenbogens läßt sich mittels der Formel berechnen:
$s = 2h + \frac{4}{3}\frac{f^2}{h}$.

Bei der Construction von Kettenbrücken finden die Gleichungen II. bis mit IV. nützliche Anwendung.

§. 81.

Bei den bisherigen Untersuchungen nahmen wir Seile und Ketten als vollkommen biegsam an; da dieß jedoch in der Wirklichkeit nicht stattfindet, vielmehr Seile sowohl als Ketten, wenn sie um irgend einen Körper gelegt oder gebogen werden sollen, der biegenden Kraft einen gewissen Widerstand entgegenstellen, so mag dieser Umstand einer besondern Betrachtung unterworfen werden.

Denkt man sich zunächst einen Cylinder vom Radius $= r$, um welchen ein Seil vom Durchmesser $= \delta$ gelegt werden soll, und sind die spannenden Kräfte an beiden Seilenden T und Q, so kann nicht mehr $T = Q$ sein, wie dieß nach dem Vorgehenden der Fall sein müßte, sondern man wird zu setzen haben

$$(1)\quad T = Q + S,$$

wo S die Größe der Kraft bezeichnet, die zur Ueberwältigung der Seilbiegung nöthig ist.

Der wegen der Unbiegsamkeit auftretende Widerstand rührt aber theils von der Textur des Seiles, theils von der Spannung desselben her; stellt man daher die Wirkung der ersten Ursache durch a, die der zweiten durch bQ dar, so ist der ganze Widerstand darzustellen durch

$$a + bQ.$$

Dieser Widerstand muß aber ferner um so größer werden, je dicker das Seil ist, und demnach in irgend einer Potenz des Durchmessers desselben wachsen, dagegen um so geringer sein, je größer der Durchmesser des Cylinders ist, um welchen dasselbe gebogen werden soll, oder im umgekehrten Verhältnisse dieses Durchmessers abnehmen.

Demnach wird man die zur Ueberwältigung des Gesammtwiderstandes nöthige Kraft S durch die Formel ausdrücken können

$$(2)\quad S = \frac{\delta^n}{2r}(a + bQ).$$

In dieser Formel müssen nun die Größen n, a und b durch Versuche bestimmt werden, was leider genügend bis jetzt noch nicht geschehen ist *).

*) Aus Versuchen Culomb's mit vier neuen trockenen Hanfseilen läßt sich folgende Tabelle zusammenstellen, welche die erforderlichen Gewichte enthält, verschiedene Seile um einen Cylinder von 1 Meter Durchmesser zu biegen.

Bevor daher über diesen, allerdings wichtigen Gegenstand, vollständigere Versuche (als die von Culomb) nicht bekannt sind, wollen wir mit Eytelwein den Ausdruck benutzen *)

$$\text{I.}\quad S = k \cdot \frac{\delta^2}{r} \cdot Q,$$

wo $k = 18$ gesetzt werden kann, wenn δ und r in Metern gegeben sind und r den Cylinderhalbmesser vermehrt um die halbe Seildicke bezeichnet.

Aus (1) folgt demnach

$$T = Q + k \frac{\delta^2}{r} Q,$$

sowie das statische Moment der spannenden Kraft T

$$\text{II.}\quad Tr = Q\,(r + k\delta^2).$$

Wird statt des Seiles eine Kette um den Cylinder gelegt, so ist es besonders die Reibung an den Verbindungsbolzen oder den Schnecken der Kettenglieder, die als besonderer Widerstand zu dem spannenden Gewichte gerechnet werden muß. Setzt man den Durchmesser einer solchen Schnecke $= \delta$, den Coefficienten der gleitenden Reibung $= f$, so erhält man das statische Moment der Biegungskraft S zu

$$S r = \tfrac{1}{2} f \delta Q;$$

das statische Moment der spannenden Kraft aber

$$Tr = Q\,(r + \tfrac{1}{2} f \delta).$$

Da jedoch die Kette am andern Ende wieder gerade zu biegen ist, so wird man für das Moment der Gesammtkraft setzen können

$$Tr = Q\,(r + \tfrac{1}{2} f \delta)^2, \text{ oder genau genug}$$
$$Tr = Q\,(r + f\delta).$$

Seilarten (ungetheert)	Durchmesser $= \delta$ der Seile in Metern	Gewicht der Seile auf 1 Meter Länge in Kilogr.	Werth von $a\delta^n$ in Kilogr.	Werth von $b\delta^n$ in Kilogr.
Seil von 30 Litzen	0,0200	0,2834	0,2225	0,0097
„ „ 15 „	0,0144	0,1448	0,0635	0,0055
„ „ 6 „	0,0088	0,0522	0,0106	0,0021

Für Seile von Durchmessern, wie sie die Tabelle nicht enthält, muß der am nächsten kommende Werth mit $\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^n$ multiplicirt werden, wobei δ' den Durchmesser des Seiles bezeichnet, dessen Biegungswiderstand berechnet werden soll. Der Exponent n variirt von 1 bis 2, je nach der Beschaffenheit und Stärke der Seile.

Außerdem fand Culomb, daß nasse Seile, wenn sie dünn sind, größere, wenn sie dick sind, geringere Biegsamkeit als trockene Seile bei übrigens gleichen Umständen zeigen. Unter letzterer Voraussetzung haben getheerte Seile immer eine größere Steifigkeit als ungetheerte.

*) Eytelwein. Handbuch der Statik fester Körper, §. 320.

Zusatz. Zur Beurtheilung des Biegungswiderstandes der wegen ihrer Billigkeit und Leichtigkeit neuerdings so häufig angewandten Drahtseile sind bislang noch gar keine Versuche bekannt geworden. So viel ist indeß gewiß, daß ihre Biegsamkeit viel geringer als die von Hanfseilen von gleicher Tragkraft ist. Nach neueren Erfahrungen *) soll es ausreichen, der Biegungswiderstand hinlänglich vermindert werden, wenn man den Durchmesser $= D$ des Cylinders in Fußen, über welchem ein Drahtseil gebogen wird, mittels der Formel $D = 0{,}24\,\delta^2 \sqrt{n}$ berechnet, wobei n die Fadenzahl der runden Drahtseile und δ den Durchmesssr eines Fadens in Millimetern (bei den Freiberger Bergwerksmaschinen gewöhnlich 3,3 Millimeter) bezeichnet.

Beispiel. Wie groß ist die zur Ueberwindung der Steifigkeit eines Seiles nöthige Kraft, dessen Durchmesser 0,023 Meter ($= 0^m{,}023$) beträgt, welches über einen Cylinder von 0,28 Meter ($= 0^m{,}28$) Radius gebogen werden soll und dessen eines Ende durch ein Gewicht von 400 Kilogrammen ($= 400^k$) gespannt wird?

Man erhält unmittelbar durch die Formel I.

$$S = 18\,\frac{(0{,}023)^2}{0{,}28 + 0{,}011} \times 400 = 12^k{,}96\ ^{**}).$$

Die Spannung am andern Ende T muß also für den Zustand des Gleichgewichtes sein

$$T = 400 + 12{,}96 = 412^k{,}96.$$

§. 82.

Noch ist bei den letzteren Betrachtungen die Reibung unbeachtet gelassen worden, welche am Umfange des Cylinders, um welchen das Seil geschlungen wurde, auftritt.

---

*) Freiberger Jahrbuch für den Berg- und Hütten-Mann, 1842, S. 16.

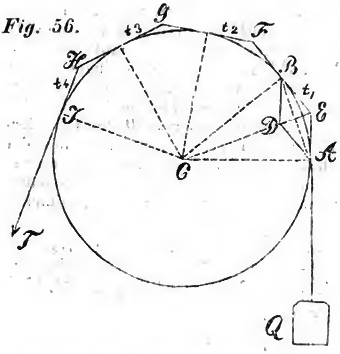
**) Mit Hülfe der Culombschen Tabelle, wenn n in (2) gleich 2 gesetzt wird, berechnet sich S wie folgt.

$$\frac{a\delta^2}{2} = \left(\frac{0{,}023}{0{,}02}\right)^2 \cdot \frac{0{,}2225}{2} = 0{,}147$$

$$\frac{b\delta^2}{2}\,Q = \left(\frac{0{,}023}{0{,}02}\right)^2 \cdot \frac{0{,}009738}{2} \cdot 400 = 2{,}6;\ \text{daher}$$

$$S = \frac{2{,}717}{0{,}291} = 9{,}44\ \text{Kil.},$$ d. h. ein bedeutend kleinerer Werth als der obige, was auch mit Gerstner's Versuchen übereinstimmt, der die Culomb'schen Werthe alle zu klein fand; a. a. O. Bd. 1. S. 516. Jedenfalls ist es aber vortheilhafter, die passiven Widerstände etwas zu groß als zu klein in Rechnung zu bringen, weshalb wir in der Folge allein die Formel I. anwenden werden.

Fig. 56.



Um die Größe dieser Reibung zu finden, stelle Fig. 56. die Seitenansicht eines unbeweglichen Cylinders vom Radius $CA = r$ vor, über welchen ein Seil gelegt ist, dessen eines Ende durch ein Gewicht Q gespannt wird; ferner sei T die Spannung oder Kraft, welche am andern Seilende anzulegen nöthig ist, um sowohl der Reibung als dem Gewichte Q das Gleichgewicht zu halten.

Den vom Seile umspannten Bogen AI denke man sich in sehr kleine Theile getheilt und an den Theilpunkten Tangenten gezogen, so daß sich letztere in den Punkten E, F, G, H, u. s. f. schneiden; je kleiner man aber die Theile des Bogens nimmt, um so mehr wird man die Tangenten AE, EB, BF etc. als Seilelemente ansehen können.

Die Spannung am ersten Elemente EA wird $= Q$ anzunehmen sein, dagegen wird die Spannung t am andern Elemente BE größer sein müssen als letztere, da diese die Reibung auf dem Elementarbogen AB des Cylinders mit zu überwinden hat. Bezeichnet man aber den auf das gedachte Element ausgeübten Normaldruck mit p, den Coefficienten der gleitenden Reibung mit f, se wird man erhalten

$$(1)\quad t = Q + fp.$$

Um p zu finden, abstrahire man vom eigenen Gewichte des Seiles, betrachte AE dem Gewichte Q proportional, formire das verschobene Quadrat $ABDE$ und ziehe die Diagonale DE desselben. Letztere ist aber als p proportional anzusehen, und da ferner $\triangle ADE \backsim \triangle CBA$ angenommen werden kann, so wird man die Proportion erhalten

$$DE : AE = BA : CA,$$

d. h., wenn man die Länge des Elementarbogens mit s bezeichnet,

$$p : Q = s : r;$$

$$p = \frac{s}{r} \cdot Q;$$

demnach aus (1)

$$t = Q + \frac{fs}{r} Q;$$

$$(2) \quad t = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right).$$

Hieraus wird man aber leicht folgern, daß zwischen t_1 und der Spannung t_2 am nächsten Seilelemente FG ebenfalls stattfinden muß

$$t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{r}\right),$$

oder, wenn man für t_1 den Werth aus (2) setzt,

$$t_2 = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^2.$$

Da nun ebenso $t_3 = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^3$;

$t_4 = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^4$ u. s. f. sein muß, so wird man allgemein für die Spannuung t_n am letzten Elemente oder T selbst setzen können

$$(3) \quad t_n = T = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^n.$$

Hieraus endlich

$$(4) \quad T = Qe^{\frac{fS}{r}} \text{*)}.$$

Wie aus der Annahme folgt, so ist hier T als eine Kraft anzusehen, welche sowohl dem Gewichte Q das Gleichgewicht hält, als auch die Reibung am Umfange des Cylinders überwindet;

---

*) Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n = 1 + n\frac{fs}{r} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{fs}{r}\right)^2 + \ldots$$

hieraus, wenn n sehr klein gedacht wird:

$$\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n = 1 + ns \cdot \frac{f}{r} + \frac{(ns)^2}{1.2} \cdot \left(\frac{f}{r}\right)^2 + \ldots$$

und wenn S den ganzen vom Seile umspannten Bogen bezeichnet, also $S = ns$ ist:

$$\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n = 1 + \frac{fS}{r} + \frac{f^2 S^2}{1.2.r^2} + \frac{f^3 S^3}{1.2.3.r^3} \ldots$$

Bezeichnet nun e die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist bekanntlich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots, \text{ daher auch}$$

$$\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n = e^{\frac{fS}{r}}.$$

soll T bloß das Herabgleiten des Gewichtes Q verhindern, so muß die Reibung als eine für T vortheilhafte Kraft auftreten, und in diesem Falle wird statt (4) zu setzen sein

$$(5)\quad T = Qe^{-\frac{fS}{r}}.$$

Allgemein erhält man demnach

$$\text{I.}\quad T = Qe^{\pm\frac{fS}{r}}.$$

Bezeichnet φ einen Bogen für den Halbmesser $= 1$, so ist $S = r\varphi$, daher, wenn dieser Werth in I. gesetzt wird,

$$\text{II.}\quad T = Qe^{\pm f\varphi}.$$

Für n Umwickelungen des Seiles wird $\varphi = 2\pi n$ und

$$\text{III.}\quad T = Qe^{\pm 2f\pi n}.$$

Verwandelt man letztere beide Gleichungen in logarithmische, so folgt

$$\text{Log. nat. } T = \text{Log. nat. } Q \pm f\varphi,$$
$$\text{Log. nat. } T = \text{Log. nat. } Q \pm 2\pi f n,$$

und für brigg'sche Logarithmen, die hier und in der Folge mit Lg. bezeichnet werden sollen,

$$\text{IV.}\quad \text{Lg. } T = \text{Lg. } Q \pm 0{,}4343\, f\varphi,$$
$$\text{Lg. } T = \text{Lg. } Q \pm 0{,}4343 \times 2\pi f n,$$
$$\text{V.}\quad \text{Lg. } T = \text{Lg. } Q \pm 0{,}8686\, f\pi n.$$

Beispiel. Wie oft muß man ein Seil um einen Cylinder wickeln, damit ein an dem einen Ende desselben aufgehangenes Gewicht von 1000 Kilogrammen nicht herabsinkt, wenn ferner das freie Seilende 1 Kilogramme wiegt und der Reibungscoefficient $f = \frac{1}{3}$ ist? *)

Aus V. folgt für diesen Fall

$$\text{Lg. } T = \text{Lg. } Q - 0{,}8686\, f\pi n;$$

$$n = \frac{\text{Lg. } Q - \text{Lg. } T}{0{,}8686\, f\pi};$$

$$n = \frac{\text{Lg. } 1000 - \text{Lg. } 1}{0{,}8686 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3{,}1416};$$

$$n = \frac{3}{0{,}91}, \text{ d. i. circa } 3{,}3\text{mal}.$$

Zusatz 1. Für technische Zwecke, bei Anordnungen von Riemen und Seilscheiben, Bremsbändern etc., findet am meisten der Ausdruck unter (4) Anwendung. Aus diesem ergiebt sich auch für die Reibung (allein) am Umfange des Cylinders oder der Scheibe: $Q\,(e^{f\varphi} - 1)$.

---

*) Das Gewicht eines Hanfseiles für jeden Meter seiner Länge läßt sich durch die Formel berechnen

$$0{,}00826\, c^2. \text{ Kilogr.},$$

wobei c den Umfang des Seiles, in Centimetern ausgedrückt, bezeichnet.

Zusatz 2. Wir lassen hier eine kleine Tabelle folgen, welche die Werthe von $e^{f\varphi}$, für verschiedene Berührungsbogen und für die Reibungscoefficienten $f = 0,5$ (Hanfseil auf rauhen hölzernen Trommeln), $f = 0,47$ (fette Riemen auf hölzernen Trommeln), $f = 0,28$ (gewöhnliche fette Riemen auf gußeisernen Scheiben) und $f = 0,12$ (stark gefettete Riemen auf gußeisernen Scheiben) berechnet enthält.

φ	$f = 0,5$	$f = 0,47$	$f = 0,28$	$f = 0,12$
$\frac{1}{4}\pi$	1,480	1,446	1,248	1,099
$\frac{1}{2}\pi$	2,193	2,091	1,552	1,207
π	4,810	4,374	2,409	1,458
$1\frac{1}{2}\pi$	10,575	9,149	3,739	1,760
2π	23,142	19,135	5,803	2,125

Der Hebel.

§. 83.

Jeder feste Körper, der so gehalten oder unterstützt ist, daß, wenn Kräfte auf ihn einwirken, er sich nur um irgend eine Linie oder Axe zu drehen vermag, niemals aber eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wird ein Hebel genannt.

Bei der Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen die am Hebel auf Drehung wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht zu halten vermögen, unterscheidet man gewöhnlich den mathematischen und den materiellen (physischen) Hebel; bei ersterem denkt man sich den Körper als gewichtslos oder als eine feste, unbiegsame Linie, bei letzterem als einen wirklichen materiellen Körper. Wird das Gewicht eines materiellen Hebels als eine in seinem Schwerpunkte niederziehende Kraft angesehen, so kann dieser ganz wie ein mathematischer Hebel behandelt werden.

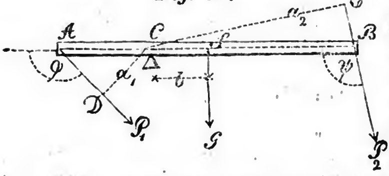
Außerdem unterscheidet man noch einarmige und doppelarmige Hebel, je nachdem der Unterstützungs- oder Drehpunkt außerhalb der Angriffspunkte der Kräfte, oder zwischen denselben liegt, wobei jedoch wohl zu beachten ist, daß hier die Benennung Hebelarm, als Verbindungsmittel der Angriffspunkte der Kräfte, nicht mit dem Hebelarme für das statische Moment verwechselt werden darf, womit bereits §. 17. die Normale aus dem Drehpunkte auf die Kraftrichtung bezeichnet wurde. Das, was man endlich gewöhnlich Winkelhebel nennt, ist nichts Anderes als die Vereinigung zweier einarmiger Hebel mit ihren Drehpunkten zu einem unabänderlichen Ganzen.

Anmerkung. Beim Hebel und den übrigen noch folgenden einfachen Maschinen unterscheidet man gewöhnlich eine einzige Kraft, welche alle übrigen auf die Maschine einwirkenden Kräfte im Gleichgewicht halten (überwinden) soll, nennt erstere, Kraft im engeren Sinne und den Inbegriff der letzteren (den Widerstand) die Last.

§. 84.

Die Bedingungen, unter welchen zwei oder mehrere an einem Hebel wirkende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, sind unmittelbar aus §. 18. und §. 30. zu entnehmen. Für den speziellen (am meisten vorkommenden Fall), daß die Richtungen sämmtlicher Kräfte mit dem Drehpunkte in derselben Ebene liegen, lassen sich alle zu stellenden Fragen, mittels der Gleichungen 9, 5 und 6, §. 18, beantworten.

Fig. 57.



Ist der Hebel doppelarmig, wie Fig. 57, S sein Schwerpunkt, die Entfernung $CS = b$, G das in S vereinte Gewicht, P_1 und P_2, die überdies auf den Hebel wirkenden Kräfte und a_1, a_2 deren respectiven Hebelarme, so folgt, mit Rücksicht auf den Sinn der Kräfte und mit Weglassung der Axenreibung,

$$\pm P_1\, a_1 \mp P_2\, a_2 \mp Gb = 0, \text{ oder}$$

$$(1)\quad P_1\, a_1 = P_2\, a_2 + Gb.$$

Hieraus aber auch, mit der Bezeichnung unserer Figur:

$$(2)\quad P_1\, \overline{AC} \sin\varphi = P_2\, \overline{CB} \sin\psi + Gb.$$

Für den Zapfendruck $= R$ erhält man

$$(3)\quad R = \sqrt{(P_1 \cos\varphi + P_2 \cos\psi)^2 + (P_1 \sin\varphi + P_2 \sin\psi + G)^2}\text{*)},$$

und dessen Richtung

$$(4)\quad tg\,\varphi = \frac{P_1 \sin\varphi + P_2 \sin\psi + G}{P_1 \cos\varphi + P_2 \cos\psi}.$$

Wirken sämmtliche Kräfte rechtwinkelig gegen die Richtung AB, so wird aus (2)

$$(5)\quad P_1 \cdot \overline{AC} = P_2 \cdot \overline{CB} + Gb,$$

es sind also in diesem Falle die (mechanischen) Hebelarme mit den Entfernungen der Angriffspunkte von der Drehaxe zu verwechseln.

Hierbei folgt aus (3):

$(6)\quad R = P_1 + P_2 + G$, was leicht in Worten auszudrücken ist.

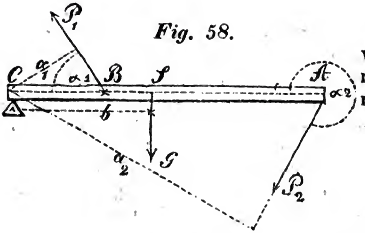
---

*) Mit Beachtung der Axenreibung wäre allgemein zu setzen:

$$P_1\, a_1 + P_2\, a_2 \ldots P_n\, a_n + f'\varrho R = 0, \text{ nach §. 70, oder}$$

$$P_1\, a_1 + P_2\, a_2 \ldots P_n\, a_n + \varphi \sqrt{\frac{(R\, tg\,\alpha)^3}{l}}, \text{ nach §. 72.}$$

Fig. 58.



Ist der Hebel einarmig, wie Fig. 58, so findet man, mit Bezug auf die Bezeichnungen der Figur:

$$(7)\ P_1 . \overline{BC} \sin \alpha_1 = P_2 \overline{AC} . \sin \alpha_2 + \overline{CS} . G.$$

$$(8)\ R = \sqrt{(P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2)^2 + (P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - Q)}.$$

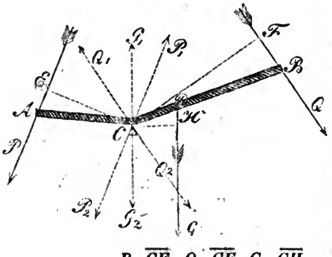
Sind auch hier die Kräfte P_1 P_2 rechtwinkelig gegen AC gerichtet, so ergiebt sich, wegen $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 270^0$:

$$(9)\ P_1 . \overline{CB} = P_2 . \overline{AC} + Gb.$$

$$(10)\ R = P_1 - P_2 - Q.$$

Zusatz 1. Mit Hülfe der Kräftepaare lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen am Hebel folgendermaßen herleiten.

Fig. 59.



Es sei ACB Fig. 59. ein beliebiger zweiarmiger Hebel, den zwei respective in A und B angreifende Kräfte im entgegengesetzten Sinne um C zu drehen sich bestreben. D sei der Schwerpunkt, G das Gesammtgewicht des Hebels.

Versetzt man sämmtliche Kräfte nach §. 25. in den Drehpunkt C, so ergeben sich drei Paare PP_1, QQ_1, GG_1, deren Momente mit Bezug auf die Figur sind:

$$P . \overline{CE},\ Q . \overline{CF},\ G . \overline{CH};$$

außerdem erhält man drei Einzelkräfte P_2, Q_2, G_2, die zu einer einzigen, jedoch auf Drehung nicht wirkenden Mittelkraft vereinigt werden können.

Die Bedingung des Gleichgewichtes in Hinsicht auf Drehung ist aber nach §. 26:

$$P . \overline{CE} = Q . \overline{CF} + G . \overline{FH} \text{ etc.}$$

Zusatz 2. Liegen die Richtungen der am Hebel angreifenden Kräfte ganz beliebig im Raume, so müssen die aus der Versetzung sämmtlicher Kräfte (§. 29) nach dem Drehpunkte erhaltenen Paare einander ebenfalls das Gleichgewicht halten, oder was dasselbe ist (nach §. 29 und §. 30), sämmtliche Kräfte müssen sich auf eine einzige durch den Drehpunkt gehende Mittelkraft zurückführen lassen.

Die Rolle.

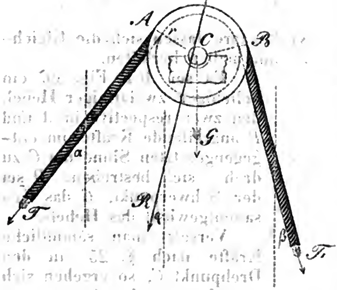
§. 85.

Unter einer Rolle versteht man eine kreisförmige Scheibe, die an ihrem Umfange zur Aufnahme eines Seiles, welches an beiden Enden durch Kräfte gespannt wird, gerinnt ist und die sich um einen durch ihre Mitte gesteckten Cylinder oder Bolzen frei drehen kann. Ist der Bolzen (absolut) befestigt oder kann er mit der Rolle zugleich nur eine drehende Bewegung annehmen, so heißt sie fest; findet dagegen neben der drehenden zugleich eine fortschreitende Bewegung statt, so wird die Rolle eine lose genannt.

§. 86.

Wir bestimmen zuerst die Gheichgewichtsbedingungen bei der festen Rolle. Fig. 60. stelle eine solche dar und zwar sei r

Fig. 60.



der Halbmesser derselben, so wie ϱ der ihres Zapfens (oder der Nabe, wenn der Bolzen absolut fest ist). Die Dicke des dabei angewandten Seiles sei $= \delta$, der Coefficient für die Zapfenreibung $= f'$, das Gewicht der Rolle sei $= G$. Die an den beiden Seilenden spannenden Kräfte mögen T, T_1 sein und zwar werde erstere als die Kraft im engeren Sinne und letztere als die Last gedacht. Endlich werde angenommen, daß die Richtungen von T und T_1 mit der Vertikale respective die Winkel α und β bilden.

Bezeichnet R die Größe der Mittelkraft aus den vorhandenen Kräften, die wir als sämmtlich in derselben Ebene liegend voraussetzen wollen, so folgt unmittelbar aus §. 18. die Momentengleichung, unter Berücksichtigung der Seilbiegung und Zapfenreibung:

$$(1)\quad Tr = T'r + k\delta^2\, T' + f'\varrho\, R.$$

Zur näheren Bestimmung von R nach (5) §. 18, bemerke man, daß zufolge unserer Bezeichnungen ist:

$$\Sigma\,(P\cos\alpha) = T\cos\alpha + T'\cos(360-\beta) + G,$$
$$\Sigma\,(P\sin\alpha) = T\sin\alpha + T'\sin(360-\beta),\ \text{daher}$$

$$(2)\quad R = \sqrt{(T\cos\alpha + T'\cos\beta + G)^2 + (T\sin\alpha - T'\sin\beta)^2},$$

oder genau genug, nach V. §. 12:

(3) $R = 0{,}96\,(T\cos\alpha + T'\cos\beta + G) + 0{,}4\,(T\sin\alpha - T'\sin\beta)^2$.

Ueberdies folgt für die Richtung von R, wenn φ mit α und β in gleichem Sinne genommen wird, nach (6) §. 18:

$$(4)\quad tg\,\varphi = \frac{T.\sin\alpha - T_1.\sin\beta}{T.\cos\alpha + T_1.\cos\beta + G}.$$

Endlich erhält man, durch Substitution von (2) in (1) und nachheriger Reduktion:

$$\text{I.}\quad T = \frac{T'\left\{r + k\delta^2 + f'\varrho\,(0{,}96\cos\beta - 0{,}4\sin\beta)\right\} + 0{,}96\,f'\varrho.G}{r - f'\varrho\,(0{,}96\cos\alpha + 0{,}4\sin\alpha)}.$$

Aus diesen allgemeinen Ausdrücken sind besondere Fälle leicht abzuleiten, auch mannigfache andere für die Praxis wichtige Schlüsse zu bilden.

Für $\alpha = \beta =$ Null, d. h. wenn beide Seilenden vertikal gerichtet sind, ergiebt sich (ohne Annäherung) aus (2) $R = T + T' + G$, so wie aus (1) nach gehöriger Reduktion

$$\text{II.}\quad T = \frac{T'(r + k\delta^2 + f'\varrho)}{r - f'\varrho} + \frac{f'\varrho}{r - f'\varrho}.G.$$

Von letzterem Ausdrucke werden wir in der Folge besonderen Gebrauch machen, weshalb zur besseren Uebersicht der Coefficient von T' mit a, der von G mit b bezeichnet werden mag. Sodann folgt aber:

$$\text{III.}\quad T = a\,T' + b.G.$$

Mit Nichtbeachtung aller passiven Widerstände, d. h. für k und $f =$ Null, ist $T = T'$.

Beispiel 1. Man soll T für nachfolgende Zahlenwerthe berechnen.

Rollhalbmesser $= 0^m{,}09$, $\delta = 0^m{,}04$, also $r = 0^m{,}09 + \frac{1}{2}\delta = 0^m{,}11$, $\varrho = 0^m{,}018$, $f' = 0{,}19$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 0$, $T_1 = 660$ Kilogr., $G = 10$ Kil. Hiernach $T = 880{,}8$ Kil., ferner $\varphi = 11^\circ 31'$.

Beispiel 2. Das vorige Beispiel wenn $\alpha =$ Null ist, mit Angabe der verschiedenen passiven Widerstände, in Bezug auf T_1, in Procenten.

Hierbei ergiebt sich:

$T = 876{,}14$ Kil. (mit Beachtung aller Widerstände) *),
$T = 697{,}3$ „ ohne Seilbiegung, mit Zapfenreibung,
$T = 838{,}84$ „ „ Zapfenreibung, mit Seilbiegung,
$T = 660$ „ „ alle passiven Widerstände.

Es beträgt folglich, nach Procenten der Last (= 660 Kil.)

die Seilbiegung 27%, die Zapfenreibung 5,7%, beide zusammen 32,7%.

Beispiel 3. Für einen anderen Fall sei $r = 0^m{,}134$ ($= 0{,}12 + \frac{1}{2}\delta$), $\delta = 0^m{,}028$, $f = 0{,}09$, $\varrho = 0^m{,}01$, $T_1 = 200$ Kil., $G = 5$ Kil., $\alpha = \beta = 0$. Hiernach folgt

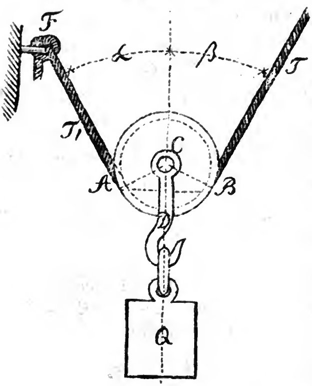
$T = \begin{cases} 223{,}94 \text{ Kil. mit allen passiv. Widerst., d. i. } 12\% \text{ (von } T_1) \\ 202{,}73 \text{ „ ohne Seilbiegung . . . . „ } 1{,}4\% \text{ „} \\ 221{,}06 \text{ „ ohne Reibung mit Seilbiegung „ } 10{,}6\% \text{ „} \end{cases}$

---

*) Der Einfluß des Winkels α ergiebt sich hiernach zu $(880{,}0 - 876{,}14) = 4{,}66$ Kil., d. i. zu etwa $\frac{3}{4}$ Procent von T_1.

§. 87.

Fig. 61.



Für die lose Rolle Fig. 61. sei am Zapfen C derselben eine gabelförmige Hülſe CD angebracht und an dieser irgend ein Gewicht Q aufgehangen. Das eine Seilende sei ferner bei F befestigt, die Spannungen beider Seilenden mögen wieder durch T' und T, sowie die Winkel, welche diese Kräfte mit der Vertikale bilden, mit α und β bezeichnet, alle andere Bezeichnung aber wie im vorigen §. beibehalten werden.

Als Gleichgewichtsbedingungen erhält man sodann nachstehende drei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} T \sin\beta - T' \sin\alpha = 0, \\ T\cos\beta + T' \cos\alpha - (Q + G) = 0, \\ Tr = T'r + k\delta^2 T' + f'\varrho Q. \end{cases}$$

In den meisten Fällen der Anwendung sind die Seilrichtungen als genau (oder beinah) vertikal anzunehmen. Sodann wird aus I:

$$(1) \quad \begin{cases} T + T' = Q + G, \\ Tr = T'r + k\delta^2 T' + f'\varrho Q. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen Q und reducirt auf T, so folgt, wie vorher bei der festen Rolle:

$$(2) \quad T = \frac{T'(r + k\delta^2 + f'\varrho) + f'\varrho G}{r - f'\varrho},$$ woraus wieder T', d. h. hier die Spannung berechnet werden kann, welche der Befestigungspunkt T des Seiles erfährt.

Entfernt man aus (1) T', so folgt

$$\text{II.} \quad T = \frac{r + k\delta^2 + f'\varrho}{2r + k\delta^2} \cdot Q + \frac{r + k\delta^2}{2r + k\delta^2} \cdot G,$$ wofür, ähnlich dem vorigen §., gesetzt werden mag:

$$\text{III.} \quad T = cQ + dG.$$

Läßt man in I. Reibung und Seilbiegung unbeachtet und nimmt $\alpha = \beta$ an, so folgt

$$(3) \quad T = T' = \frac{Q + G}{2\cos\alpha},$$ oder mit Bezug auf die Figur:

$T = T' = (Q + G)\,\frac{AC}{AB}$, was leicht in Worten auszudrücken ist.

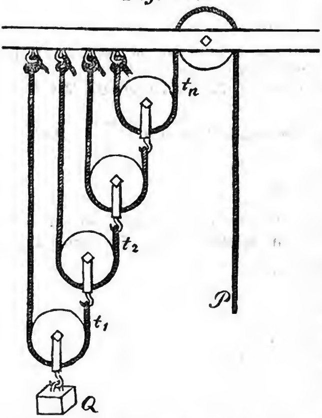
Für $\alpha = 0$ erhält man endlich aus (2)

$T = T' = \frac{Q + G}{2}$, d. h. jedes Seilende wird mit der Hälfte der vorhandenen Last gespannt.

Beispiel. Es ist T zu berechnen, wenn $r = 0^m,131$ $(= 0^m,12 + \frac{\delta}{2})$, $\delta = 0^m,028$, $\varrho = 0^m.01$, $f' = 0,09$, $Q = 200$ Kil., $G = 5$ Kil., $\alpha = \beta =$ Null ist Aus II. folgt hiernach $T = 108,26$ Kil., während ohne Reibung und Seilbiegung $T = 100$ Kil. gewesen wäre.

§. 88.

Fig. 62.



Verbindet man mehre lose Rollen so mit einander, wie Fig. 62. zeigt, daß nämlich von den über die Rollen gelegten Seilen immer das eine Ende fest, das andere aber an der Pfanne der nächst höheren Rolle angeknüpft ist, so wird die Verbindung ein Rollenzug genannt. Die letzte (feste) Rolle heißt die Handrolle.

Die Gleichung für das Gleichgewicht zwischen einer am losen Seilende angreifenden Kraft P und einem an der Hülse der untersten Rolle aufgehangenen Gewichte Q läßt sich, wie nachstehend, herleiten. Man nehme die Radien allen Rollen gleich groß und bezeichne die Spannungen der an den Pfannen befestigten Seilenden auf einander folgend mit t_1, t_2, $t_3 \ldots . t_n$, so erhält man nach III. des vorigen §.

$$t_1 = cQ + dG;$$
$$t_2 = ct_1 + dG = c^2 Q + dG\,(c + 1);$$
$$t_3 = ct_2 + dG = c^3 Q + dG\,(c^2 + c + 1) \text{ u. s. f.}$$

endlich

$$t_n = ct_{n-1} + dG = c^n Q + dG\,(c^{n-1} + c^{n-2} \ldots . c^2 + c + 1);$$

$$(1)\quad t^n = c^n Q + dG\left(\frac{c^n - 1}{c - 1}\right).$$

Nach III. §. 87. ist aber

$$P = at_n + bG;$$

demnach, wenn hierin der Werth aus (1) gesetzt wird,

$$\text{I. } P = a\left\{c^n Q + dG\left(\frac{c^n - 1}{c - 1}\right)\right\} + bG.$$

Sieht man von Reibung, Seilbiegung und dem Gewichte G ab, so wird

$$a = 1,\ b = 0,\ c = d = \tfrac{1}{2}, \text{ folglich}$$

$$\text{II. } P = \frac{Q}{2^n}.$$

Zusatz. Für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden (eigentlich allein anwendbaren) Fall, wenn nämlich der Rollenzug aus einer einzigen losen Rolle in Verbindung mit der Handrolle besteht, erhält man aus I, da $n = 1$ wird,

$$\text{III. } P = a(cQ + dG) + bG.$$

Beispiel. Für einen Rollenzug der letzteren Art, wobei die Dimensionen beider Rollen dieselben und zwar die des Beispieles im vorigen §. sind, folgt

$a = 1{,}12$, $b = 0{,}0067$, $c = 0{,}5282$, $d = 0{,}524$, somit, wegen $Q = 200$, $G = 5$

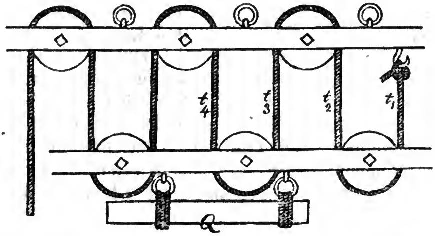
$P = 121{,}28$ Kil.

Ohne Beachtung der Reibung und Seilbiegung folgt aus II. $P = \frac{Q}{2} = 100$ Kil.

§. 89.

Schließt man mehre Rollen in ein Gehäuse ein, so entsteht eine sogenannte Flasche oder ein Kloben, Fig. 63, und ver-

Fig. 63.



bindet man zwei solche Flaschen mittels eines Seiles, das von einer Rolle der einen Flasche auf eine Rolle der andern übergeht, so wird die Verbindung ein Flaschenzug genannt.

Zwei andere Anordnungen von Flaschenzügen zeigen die Figuren 64 und 65, wovon die erstere, aus leicht nachzuweisenden Gründen, jedenfalls die vortheilhafteste ist.

Fig. 64

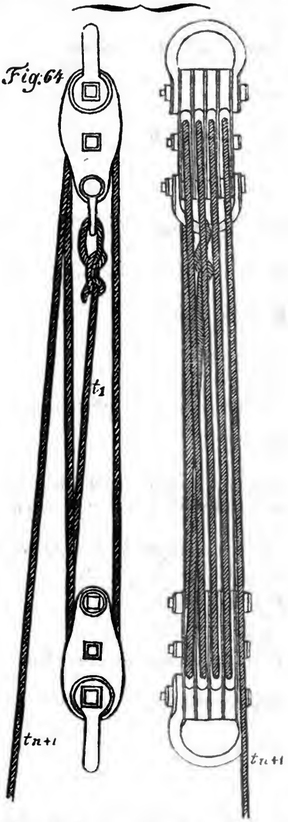
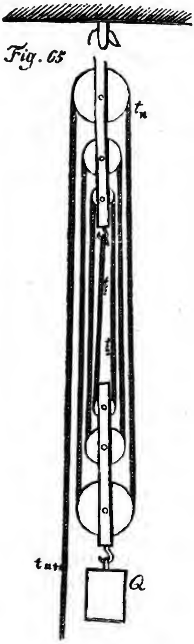


Fig. 65



Um hier die Gleichgewichtsgleichung zu erhalten, mögen wieder die auf einander folgenden Seilspannungen, vom festen Seilende an gerechnet, t_1, t_2, t_3 ... t_n, t_{n+1} sein, übrigens aber ganz die Bezeichnungen der vorigen §§. beibehalten werden.

Nach §. 87. oder 88. erhält man sodann

$$t_2 r = t_1 r + k\delta^2 t_1 + f'\varrho (t_2 + t_1)\text{; d. g.}$$

$$(1)\quad t_2 = t_1 \frac{r + k\delta^2 + f'\varrho}{r - f'\varrho};$$

oder, wenn man den Factor von t_1 mit A bezeichnet,

$$t_2 = t_1 A.$$

Eben so wird sein müssen

$$t_3 = t_2 A = t_1 A^2;$$

$$t_4 = t_3 A = t_1 A^3 \text{ u. s. w., endlich}$$

$$t_n = t_{n-1} A = t_1 A^{n-1}.$$

Ferner ist auch

$$(2)\quad P = t_{n+1} = t_1 A^n.$$

Die Summe der einzelnen Spannungen $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ ist aber gleich $Q + G$, daher

$$(3)\quad t_1 (1 + A + A^2 + A^3 + \ldots . A^{n-1}) = Q + G, \text{ oder}$$

$$t_1 \left(\frac{A^n - 1}{A - 1}\right) = Q + G, \text{ und}$$

$$t_1 = (Q + G) \frac{A - 1}{A^n - 1}.$$

Setzt man den letzteren Werth in (2), so erhält man

$$\text{I. } P = \frac{A^{n+1} - A^n}{A^n - 1} (Q + G).$$

Für den Fall, daß die einzelnen Rollen verschiedene Größe haben, kann man mit dem arithmetischen Mittel aus ihren Radien rechnen.

Will man die Anzahl $= n$ der verbundenen Seile berechnen, so erhält man aus I. nach gehöriger Reduction

$$\text{II. } n = \frac{\text{Lg } P - \text{Lg} \left\{ P - (Q + G)(A - 1) \right\}}{\text{Lg } A},$$

welcher Ausdruck jedoch nur so lange möglich sein kann, als $P > (Q + G)(A - 1)$ ist.

Sieht man von allen Nebenwiderständen ab, so wird $A = 1$, und aus (3)

$$t_1 = \frac{Q + G}{n};$$

demnach aus (2)

$$\text{III. } P = \frac{Q + G}{n}.$$

Letztere Gleichung hätte sich auch mit Hülfe des Cartesianischen Satzes §. 36. herleiten lassen.

Beispiel 1. Man soll bei einem Flaschenzuge P berechnen, wenn $Q = 500$ Kil., $G = 60$ Kil., $r = 0^m{,}069$ $(= 0{,}06 + \frac{\delta}{2})$, $\delta = 0{,}018$, $\varrho = 0^m{,}01$, $f' = 0{,}19$, $n = 8$ gegeben ist.

Auflösung. Zuerst ergiebt sich $A = 1{,}1435$, ferner
$A^9 = 3{,}343$, $A^8 = 2{,}9237$, sodann nach I:
$P = 127{,}15$ Kil., während ohne passive Widerstände
$P = 70$ Kil. ist.

Beispiel 2. Es ist die Anzahl der Rollen eines Flaschenzuges zu berechnen, wenn nachfolgende Größen gegeben sind:
$Q = 450$ Kil., $P = 100$ Kil., $G = 50$ Kil., $r = 0^m{,}085$, $\delta = 0^m{,}02$, $f' = 0{,}2$, $\varrho = 0{,}012$. Aus II. folgt hiernach
$n = 9{,}5$, wofür man 10 parallele Seile, also 5 Rollen für die lose Flasche annehmen kann.

Das Wellrad.

§. 90.

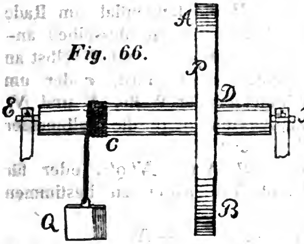


Fig. 66.

Eine kreisförmige Scheibe *AB* Fig. 66, 67 und 68, die so mit einem Cylinder *CD* fest verbunden ist, daß die Axe des letzteren durch den Mittelpunkt der Scheibe geht und auf ihrer Ebene senkrecht steht, heißt ein Rad an der Welle oder Wellrad. Die Scheibe wird nämlich hierbei das Rad, der Cylinder die Welle genannt. An den beiden Enden der Welle, und zwar in der Richtung der Axe derselben, sind Zapfen *E*, *F* angebracht, die in festen Lagern oder Pfannen liegen und die ganze Vorrichtung tragen.

Die Axe der Welle liegt entweder horizontal, oder steht vertikal, oder ist gegen den Horizont geneigt. Gewöhnlich wirkt am Umfange des Rades (oder an einer Vorrichtung, die sich auf das Rad zurückführen läßt) tangential eine Kraft, die einer ebenfalls tangential am Umfange der Welle angebrachten Last das Gleichgewicht zu halten hat.

Zusatz. Die ausführliche Beschreibung und Beurtheilungen der verschiedenen Modificationen, unter welcher das Wellrad in der Praxis angewandt wird, gehört in die Maschinenlehre. Wir bemerken in dieser Beziehung nur Folgendes.

Bei horizontaler Welle heißt das Wellrad im Allgemeinen ein Haspel und zwar Radhaspel, Kreuzhaspel oder Hornhaspel, je nachdem die Kraft an einem wirklichen Rade, an bloßen Speichen oder einem Horne (einer Kurbel) wirkt. Bei vertikaler Welle wird es gewöhnlich stehende Winde und hierbei wieder, je nach der Construction, der Wirkung von Kraft und Last etc., Göpel, Lauf- oder Tretrad, Wasserrad, Windrad etc. genannt.

Bei geneigter Welle erhält es in der Regel den Namen Tretscheibe. Eine besondere Art von Haspel bildet die sogenannte Gegenwinde (chinesische Winde). Die cylindrische Welle besteht hier aus zwei Theilen von verschiedenen Durchmessern. Die Last ist an dem Kloben einer losen Rolle aufgehangen, über welche letztere ein Seil geschlagen ist, wovon das eine Ende auf dem Wellteile vom größern, das andere Ende auf dem Welltheile vom kleinern Durchmesser befestigt ist. Bei der Umdrehung der Welle windet sich das eine Seilende auf, das andere ab.

§. 91.

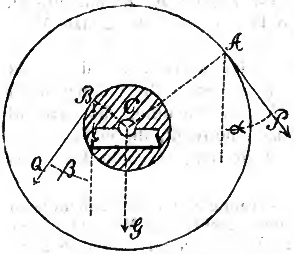
Für die meisten Fälle der technischen Anwendung erhält man hinreichende Annäherungswerthe, wenn man die ganze Gleichgewichtsfrage bei dem Wellrade so behandelt, als wirkten sämmtliche Kräfte in derselben Ebene.

Unter dieser Voraussetzung sei P die tangential am Rade und zwar in der Entfernung des Halbmessers R desselben angreifende Kraft, Q die am Wellmantel wirkende und daselbst an einem Seile von der Dicke $= \delta$ aufgehangene Last, r der um die halbe Seildicke vermehrte Halbmesser der Welle, N und N_1 die Pressungen auf respectiven Zapfen und ϱ, ϱ' die Halbmesser der letzteren. Sodann folgt nach §. 18:

$PR = Qr + Qk\delta^2 + f'(N\varrho + N'\varrho')$, oder für gleich starke Zapfen (wobei N und N_1 leichter zu bestimmen sind):

$$(1)\quad PR = Qr + Qk\delta^2 + f'\varrho\,(N + N').$$

Fig. 67.



Zur Bestimmung von N und N' werde ferner angenommen, daß die Richtungen von P und Q mit der Vertikale (wie in Fig. 67) die Winkel α und β bilden, so daß man erhält:

$$(2)\quad N + N' = \sqrt{(P\cos\alpha + Q\cos\beta + G)^2 + (P\sin\alpha - Q\sin\beta)^2};$$

so wie, wenn φ den Richtungswinkel dieses Druckes mit der Vertikale bezeichnet,

$$(3)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{P\sin\alpha - Q\sin\beta}{P\cos\alpha + Q\cos\beta + G}.$$

Hinreichend genau daher aus (1)

$$(4)\quad PR = Qr + Qk\delta^2 + f'\varrho \left\{ 0{,}96\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta + G) + \right.$$
$$\left. + 0{,}4\,(P\sin\alpha - Q\sin\beta) \right\}.$$

Hieraus ist P sofort zu reduciren, auch sind specielle Fälle leicht abzuleiten *).

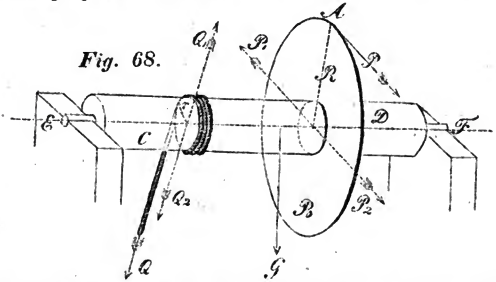
Zusatz 1. Für eine stehende Welle ist in die Gleichung (1) noch das Reibungsmoment an der untern Zapfenfläche einzuführen; N und N' bezeichnen sodann die Seitenpressungen am untern und obern Zapfen. Stellt daher wie bisher G das Gesammtgewicht der stehenden Welle dar, so folgt, mit Bezug auf §. 72:

$$PR = Qr + Qk\delta^2 + f'\varrho\,(N + N') + \tfrac{2}{3} f'\varrho\, G.$$

Zusatz 2. In der Wirklichkeit liegen die Kräfte P, Q und G in der Regel in Parallelebenen, die sämmtlich zur Wellaxe normal sind.

Mit Hülfe der Kräftepaare läßt sich auch hier die Gleichgewichtsbedingung leicht herleiten.

Fig. 68.



Versetzt man nach §. 29. sämmtliche Kräfte in die Axe EF des Wellrades, Fig. 68, so erhält man die Paare PP', QQ' und die an der Axe wirkenden Einzelkräfte $P_2 (= P)$, $Q_2 (= Q)$, die sich mit G vereinigen und nur auf Zapfendruck wirken. Die Momente der Paare sind $P.R$ und Qr. Das Paar QQ_1 läßt sich aber nach §. 27. ohne Aenderung seiner Wirkung in die Ebene AB des Rades versetzen, so daß die Bedingung gegen Drehung (§. 26.) durch die Gleichung ausgedrückt wird

$PR = Qr$, wie vorher ebenfalls gefunden wurde, sobald man die Zapfenreibung und Seilbiegung unbeachtet ließ.

Die Pressungen N und N_1 auf die respectiven Zapfen sind auch hier durch geeignete Zerlegung der Kräfte P_2, Q_2 und G leicht zu bestimmen.

Zusatz 3. Liegen die Richtungen sämmtlicher am Wellrade wirkenden Kräfte in ganz beliebigen Ebenen, so zerlege man jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die zur Wellaxe respective rechtwinkelig

---

*) Aendert P seine Richtung fortwährend, wie dies häufig der Fall ist, so ist für α ein Mittelwerth einzuführen.

und parallel sind. Die Parallelkräfte lassen sich aber in die Axe selbst versetzen und für die erhaltenen Einzelkräfte wie für die Paare die Resultirende finden. Letztere beiden werden aber vermöge der Anordnung des Wellrades vernichtet (oder können nur auf Zapfenreibung wirken), weil die Welle weder in der Axenrichtung verschoben, noch irgend wie im Raume, außer um die eigene Axe, verdreht werden kann. Es bleiben mithin nur die in rechtwinkeligen Ebenen zur Axe liegenden Kräfte übrig, für welche die ganze Betrachtung die vorhergehende wird.

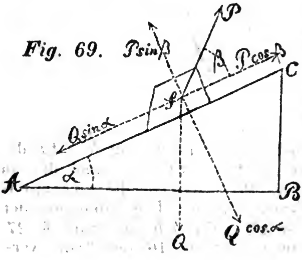
Die schiefe Ebene.

§. 92.

Jede feste, nicht zusammendrückbare, unter einem beliebigen Winkel gegen den Horizont geneigte Fläche heißt eine schiefe Ebene. Wir betrachten hier die schiefe Ebene für den besonderen Fall, daß sich gegen dieselbe ein Körper vom Gewichte Q stützt, welcher durch eine Kraft P im Gleichgewicht gehalten werden soll.

Ist die Fläche gekrümmt, so kann man sich durch den Berührungspunkt zwischen dem Körper und der Fläche eine Berührungsebene zu letzterer gelegt denken und annehmen, daß der Körper auf dieser Ebene ruht.

Fig. 69.



Stellt AC in Fig. 69. die Durchschnittslinie einer schiefen Ebene mit der Vertikalebene vor, und ist AB horizontal, so wird der Winkel $CAB = \alpha$ der Neigungswinkel, der Schenkel AC dieses Winkels die Länge, die Vertikale BC die Höhe und AB die Basis oder Grundlinie der schiefen Ebene genannt.

§. 93.

Um möglichst einfach eine Gleichung für das Gleichgewicht zwischen P und Q aufzustellen, werde angenommen, daß die Kraft P im Schwerpunkte S des Körpers angreift und ihre Richtung mit der von Q in derselben Ebene liegt, jedoch mit der Länge AC den Winkel β bildet*).

Zerlegt man sodann P und Q in Seitenkräfte, die parallel und rechtwinkelig zur Länge AB gerichtet sind, so erhält man

*) Für eine allgemeinere Auffassung der hier vorliegenden Frage, beachte man das in §. 31. Gesagte.

für die parallelen Kräfte $Q \sin\alpha$*) und $P\cos\beta$, so wie für die Normalkräfte $Q\cos\alpha$ und $P\sin\beta$. Letztere erzeugen einen Normaldruck N:

$$(1)\quad N = Q\cos\alpha - P\sin\beta;$$

demnach auch die Reibung, wenn f den Reibungscoefficienten bezeichnet,

$$(2)\quad fN = f.(Q\cos\alpha - P\sin\beta).$$

Nimmt man nun an, daß die Kraft P den Körper blos auf der schiefen Ebene zu erhalten hat, daß also die Reibung der Kraft P zu Gute kommt, so muß sein

$$P\cos\beta = Q\sin\alpha - fN;$$
$$P\cos\beta = Q\sin\alpha - f(Q\cos\alpha - P\sin\beta);$$

$$\text{I.}\quad P = Q\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\beta - f\sin\beta}.$$

Wird hier $\cos\beta - f\sin\beta$ negativ, während $\sin\alpha - f\cos\alpha$ positiv bleibt, also überhaupt P negativ, so ist letztere diejenige Kraft, welche in der Richtung von P nach S (also abwärts) wirkend angebracht werden kann, ohne daß der Körper von der schiefen Ebene herabgleitet.

In dem Falle, daß $P = 0$ wird, erhält man

$$\sin\alpha - f\cos\alpha = 0, \text{ oder}$$
$$tg\alpha = f, \text{ d. h.}$$

der Körper wird allein durch die Reibung auf der schiefen Ebene erhalten, wenn die Tangente ihres Neigungswinkels gleich (oder kleiner) als der entsprechende Reibungscoefficient ist. Man nennt den betreffenden Winkel insbesondere den Reibungswinkel und erkennt leicht, wie man selbigen benutzen kann, um (annäherungsweise) den Coefficienten der entsprechenden gleitenden Reibung zu bestimmen.

Hat dagegen P die Reibung zugleich mit zu überwinden, d. h. soll die Kraft gefunden werden, welche nöthig ist, um bei dem geringsten Zusatze das Aufrücken des Körpers längs der schiefen Ebene zu bewirken, so erhält man

$$P\cos\beta = Q\sin\alpha + f(Q\cos\alpha - P\sin\beta);$$

$$\text{II.}\quad P = Q\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta}.$$

Auch hier kann P negativ werden, sobald β zwischen 90° und 270° liegt etc.

Die Gleichungen I. und II. lassen sich auch vereint darstellen durch

---

*) $Q\sin\alpha$ nennt man das relative Gewicht des Körpers, in Bezug auf das absolute Gewicht Q desselben.

$$\text{III.}\quad P = Q\frac{\sin\alpha \pm f\cos\alpha}{\cos\beta \pm f\sin\beta}\text{ *)}.$$

Ist P parallel zur Länge der schiefen Ebene gerichtet, so wird $\beta = 0$ und man erhält aus I. und II. respective

$$\text{IV.}\quad P = Q\,(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

$$\text{V.}\quad P = Q\,(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

Gleichungen, bei welchen sich ähnliche Schlüsse in Bezug auf α, wie I. und II. hinsichtlich β bilden lassen.

Vorzügliche Anwendung findet in der Folge (bei der Schraube) der besondere Fall, wenn P horizontal gerichtet ist, parallel zur Basis der schiefen Ebene wirkt, also $-\alpha$ statt β in I. und II. gesetzt werden muß. Sodann folgt aus I:

$$\text{VI.}\quad P = Q\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = Q\,\frac{tg\alpha - f}{1 + f\,.\,tg\alpha};\ \text{aus II:}$$

$$\text{VII.}\quad P = Q\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = Q\,\frac{tg\alpha + f}{1 - f\,.\,tg\alpha}.$$

In beiden letzteren Fällen ist der Normaldruck nach (1)

$$(3)\quad N = Q\cos\alpha + P\sin\alpha.$$

P in VI. wird Null, wenn $tg\alpha = f$; negativ sobald $tg\alpha < f$ ist. P in VII. wird ∞ für $cotg\alpha = f$ etc. etc.

Bezeichnet P' die Kraft, welche den Körper für den Fall, daß $tg\alpha < f$ ist, von der schiefen Ebene herabziehen soll, so kann man statt VI. auch schreiben:

$$\text{VIII.}\quad P' = Q\,\frac{f - tg\alpha}{1 + f\,.\,tg\alpha}.$$

Läßt man die Reibung unbeachtet, so ergiebt sich aus IV. und V.

$$\text{IX.}\quad P = Q\sin\alpha = Q\,.\,\frac{BC}{AC},\ \text{oder}\ P : Q = BC : AC.$$

Es verhält sich also die mit der schiefen Ebene parallele Kraft zum Gewichte des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Eben so erhält man aus VI. und VII:

$$\text{X.}\quad P = Q\,tg\alpha = Q\,\frac{BC}{AB}\ \text{oder}\ P : Q = BC : AB.\ \text{d. h.}$$

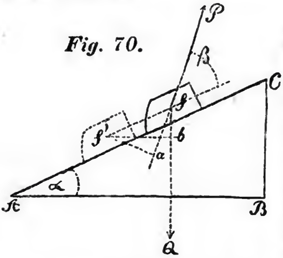
Die horizontale Kraft verhält sich zum Gewichte des Körpers wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Basis.

---

*) Hierbei wird P in Bezug auf β am Kleinsten, wenn man $tg\beta = \pm f$ nimmt, die Zeichen $\pm$ respective den obigen Bezeichnungen genommen.

Zusatz 1. Mit Hülfe des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten läßt sich die vorstehende Hauptgleichung auf folgende Weise herleiten.

Fig. 70.



Denkt man sich den Körper von S Fig. 70. nach S' auf der schiefen Ebene um den Weg SS' fortbewegt und von S' aus auf die ursprünglichen Kraftrichtungen, Normalen $S'a$ und $S'b$, gefällt, so müssen Sa und Sb die virtuellen Geschwindigkeiten beziehlich von P und Q sein. Da ferner die virtuelle Geschwindigkeit des die Reibung erzeugenden Normaldrucks $N.\,SS'$ sein muß, so erhält man für den Zustand des Gleichgewichts nach §. 34:

$$(1)\quad P.Sa - Q.Sb \pm fN.SS' = o.$$

Der Figur nach ist aber

$Sa = S'S.\cos\beta$, $Sb = S'S\sin\alpha$, sowie nach 1) vorigen §. $N = Q\cos\alpha - P\sin\beta$, folglich, wenn man diese Werthe in (1) setzt

$$P.SS'.\cos\beta - Q.SS'.\sin\alpha \pm f(Q\cos\alpha - P\sin\beta).SS' = O;$$

$$P\cos\beta - Q\sin\alpha \mp f(Q\cos\alpha - P\sin\beta) = o;$$

$$P = Q\,\frac{\sin a \pm f\cos\alpha}{\cos\beta \pm f\sin\beta}.$$

Zusatz 2. Greift die Kraft P nicht im Schwerpunkte, sondern an irgend einem anderen Punkte des Körpers an, so ist eine Drehung des letzteren möglich und die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen muß mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen §. 18 oder 30 geschehen, je nachdem die Richtungen von P und Q in derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegt.

Zusatz 3. Stützt sich ein gewichtiger Körper gleichzeitig gegen zwei Ebenen, berührt er jede derselben in einem Punkte und ist er allein der Schwerkraftswirkung unterworfen, so wird fürs Gleichgewicht erfordert, daß die Richtungen der in den Ebenen hervorgerufenen (normalen) Gegendrücke mit der im Schwerpunkte des Körpers vertikal abwärts wirkenden Kraft in einerlei Ebenen liegen und alle drei Kraftrichtungen in einem Punkte zusammenlaufen. Später (beim Keile) wird sich Gelegenheit darbieten auf diesen Fall zurückzukommen.

Beispiel. Auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $\alpha = 40^0$ ist, liegt ein Körper vom Gewichte $Q = 200$ Kil, man soll die im Schwerpunkte des Körpers anzulegende Kraft P finden, welche denselben einmal mit Benutzung der Reibung, ein anderes Mal mit Ueberwältigung der Reibung im Gleichgewichte zu halten vermag. Um gleichzeitig den Einfluß der Richtung von P beurtheilen zu können, mögen die drei Fälle gedacht werden, daß P mit der Länge der schiefen Ebene die Winkel ($= \beta$) 10^0, 70^0 und 120^0 bildet.

Auflösung. Nach Gleichung III. findet man, wenn $\beta = 10^0$:

$P = 156{,}16$ Kil. (für $+$), $P = 103{,}02$ Kil. (für $-$);

wenn $\beta = 70^0$:

$P = 300{,}4$ Kil. (für $+$), $P = 636$ Kil. (für $-$);

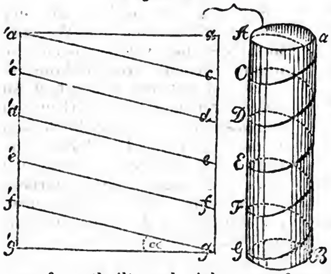
wenn $\beta = 120^0$:

$P = -487{,}2$ (für $+$), $P = -145{,}6$ Kil. (für $-$).

Die Schraube.

§. 94.

Fig. 71.



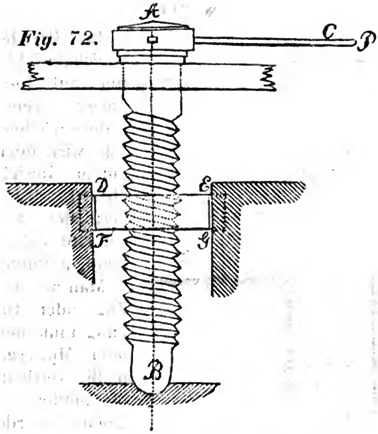
Denkt man sich den Mantel eines geraden Cylinders AB. Fig. 71. abgewickelt, so bildet dieser bekanntlich ein Rechteck ag', dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Cylinders gleich ist und mit ihm gleiche Höhe hat. Werden dabei die Höhen AG, ag und $a'g'$ in gleich viel Theile $FG = gf = f'g' = FE = ef = e'f'$ u. s. f. getheilt und zieht man ferner die Transversalen gf', fe' u. s. f., so werden, wenn man das Rechteck entsprechend wieder als Mantel um den Cylinder legt, die Punkte g und g' mit G, f und f' mit F u. s. f. zusammenfallen. Die Transversalen bilden aber dann auf der Oberfläche des Cylinders eine stetige Linie von doppelter Krümmung, die man Schraubenlinie nennt.

Jeder Theil der Schraubenlinie, welcher einer und derselben Transversale angehört und demnach einmal um den Cylinder herumgeht, heißt ein Schraubengang, der Abstand $GF = FE$ zwischen zwei benachbarten Schraubengängen die Höhe, und der Neigungswinkel α der Transversalen gegen den Horizont der Neigungs- oder Steigungswinkel der Schraube.

Anstatt der Schraubenlinie kann man auf der Oberfläche des Cylinders eine prismatische Hervorragung so anbringen, daß alle Durchschnitte derselben, nach der Cylinderaxe geführt, gleich groß sind; alsdann wird der Cylinder eine Schraubenspindel (Kern) und die gedachte Hervorragung das Schraubengewinde genannt.

Ein ausgehöhlter Körper, in dessen Höhlung Vertiefungen eingeschnitten sind, in welche das Gewinde genau paßt, wird eine Schraubenmutter genannt. Spindel und Mutter bilden aber zusammengenommen ein Ganzes, die Schraube.

Fig. 72.



Je nachdem das Gewinde einen rectangulären oder dreieckigen Querschnitt bildet, heißt die Schraube flachgängig (vierseitig, viereckig), oder scharfgängig (dreiseitig, dreieckig) *). Ferner unterscheidet man eingängige und mehrgängige Schrauben, je nachdem ein Gewinde oder mehre vollkommen gleiche Gewinde um die Spindel herum laufen. Außerdem nennt man die Schraube noch rechts- oder linksgängig, je nachdem die Gewinde von links nach rechts, oder von rechts nach links aufsteigen. So zeigt Fig. 72. eine scharfgängig linke, Fig. 73. eine flachgängig rechte Schraube.

Bei dem Gebrauche der Schraube dreht man entweder die Spindel oder die Mutter um und versetzt erstere oder letztere in eine fortschreitende Bewegung, so daß überhaupt vier verschiedene Fälle der Wirkungsweise möglich sind.

---

*) Man unterscheidet auch wohl noch Schrauben mit runden Gewinden von jenen beiden, und versteht darunter dreieckige Schrauben, wobei die äußeren scharfen Kanten abgerundet sind.

§. 95.

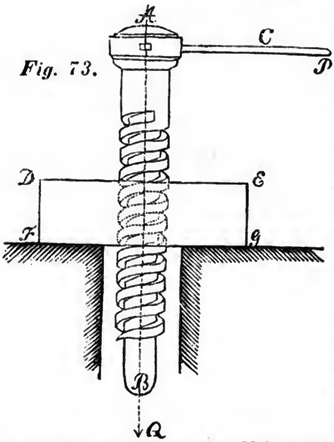


Fig. 73.

Die Gleichung für das Gleichgewicht zwischen einer auf Umdrehung der flachgängigen Schraube mit unbeweglicher Mutter Fig. 73. wirkenden Kraft und einem Gewichte Q, welches in der Richtung der vertikalen Axe AB thätig ist, läßt sich, wie nachstehend, auffinden.

Man nehme an, daß der Zug oder Druck Q auf einer Linie der Schrauben- oder Muttergänge gleichmäßig vertheilt ist, welche die mittlere Schraubenlinie genannt werden mag, und auf welcher Q wie von einer schiefen Ebene herabzugleiten strebt, deren Neigungswinkel dem Steigungswinkel der Schraube gleich ist.

Bezeichnet man sodann den Radius des Cylinders, welcher die mittlere Schraubenlinie enthält, mit r *), die Höhe der Gänge mit h und eine horizontal und tangential am genannten Cylinder wirkende Kraft mit p, so erhält man aus VI. §. 93:

$$p = Q \frac{tg\alpha - f}{1 + f \cdot tg\alpha}, \text{ oder wegen } tg\alpha = \frac{h}{2r\pi}$$

$$\text{I. } p = Q \frac{h - 2r\pi f}{2r\pi + fh}.$$

Hier bezeichnet p die Kraft, welche mit Benutzung der Reibung, anzubringen ist, damit die Schraube in der dem Drucke Q entsprechenden Richtung nicht aufgeht, sondern im Gleichgewichte verbleibt. Ein solches p ist aber so lange erforderlich, als $tg\alpha$ oder $\frac{h}{2r\pi} > f$ ist **).

---

*) Ist der Radius der Spindel r_1, der äußere Radius der Gewinde r_2, so kann man setzen

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

**) In mehreren Fällen der Praxis, namentlich überall da wo kein dauerndes Festhalten (oder Pressen) mittels der Schraube beabsichtigt wird, macht man von dieser Eigenschaft der Schraube vortheilhafte Anwendung (Schrauben-

Für den Fall, daß letztere Werthe einander gleich werden, also $tg\alpha = \frac{h}{2r\pi} = f$, mithin $p =$ Null ist, erhält sich die Schraube allein durch die Reibung im Gleichgewichte. Auch hier (wie bei der schiefen Ebene) wird dieser besondere Neigungswinkel der Schraube, der Reibungswinkel genannt.

Ist endlich $tg\alpha < f$, so wird p negativ, d. h. die Reibung verhindert nicht bloß das Aufspringen der Schraube, sondern es kann überdies dem Drehsinne entsprechend in welchem Q die Schraube zum Zurück- (oder Nieder-) gehen anregt, eine Kraft p hinzugebracht werden, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird *). Für diesen Fall erhält man aus VIII. §. 93:

$$p = Q\frac{2r\pi . f - h}{2r\pi + fh}.$$

Die Tangentialkraft, welche den Widerstand Q und die Reibung zugleich überwältigt, folgt aus VII. §. 93, zu

$$\text{II. } p = Q\frac{h + 2r\pi f}{2r\pi - fh}.$$

Mit Hinweglassung der Reibung erhält man aus I. oder II:

$$\text{III. } p = Q\frac{h}{2r\pi}.$$

Zieht man diesen Werth respective von I. und II. ab, so erhält man die entsprechenden Reibungswiderstände allein. Beide Gleichungen (I. und II.) zusammengefaßt, können überhaupt unter folgender Form dargestellt werden

$$\text{IV. } p = Q\frac{h}{2r\pi} \mp Qf\frac{4r^2\pi^2 + h^2}{2r\pi\,(2r\pi \pm fh)}.$$

Alle vorstehenden für die Schraube ermittelten Gleichungen gelten, mag dieselbe ein- oder mehrgängig sein, indem sich letztere offenbar so verhält, wie eine eingängige Schraube von derselben Steigung.

Beispiel. Bei einer eisernen Schraube mit flachem Gewinde sei der äußere Durchmesser ($2r_2$) $3\frac{1}{2}$ mal so groß als die Steigung **), man soll die Größe der

Durchschnitte, Prägwerke, Pressen etc.). Man erreicht solches in der Regel dadurch, daß man h sehr groß nimmt. Um dabei unzweckmäßig große Dimensionen der Gewinde und unvollkommenes Ineinandergreifen von Spindel und Mutter zu vermeiden, macht man die Schraube mehrgängig.

*) Zufällig einwirkende Stöße oder sonstige Erschütterungen verursachen zuweilen jedoch auch dann, wenn die Bedingung $tg\alpha < f$ erfüllt ist, ein Zurückgehen (Loswerden) der Schrauben, weshalb man erstere vermeiden, auch sonst geeignete Mittel (Gegenmuttern, Keile, Sperrungen etc.) anbringen muß.

**) Beiläufig werde bemerkt, daß $2r_2 = 3\frac{1}{2}\frac{h}{n}$ bis $4\frac{h}{n}$ gute Verhältnisse für flache Schrauben mit $n$fachem Gewinde abgeben.

Tangentialkraft p als Theil der Last Q angeben, welche zum Ueberwinden der letzteren mit Berücksichtigung der Reibung erforderlich ist.

Auflösung: Den gegebenen Verhältnissen zufolge und wenn der Vorsprung der Gänge $= \frac{1}{2} h$ gesetzt wird, ist der Halbmesser des Kernes $= r_1 = \frac{7}{4} h - \frac{1}{2} h = \frac{5}{4} h$, folgl. $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{3}{2} h$. Demnach aus IV. indem hier die unteren Zeichen zu nehmen sind

$$p = 0{,}106 \,.\, Q + Qf \frac{85{,}823}{3\pi\,(3\pi - f)}, \text{ und für } f = 0{,}1$$

$$p = 0{,}106\, Q + 0{,}1023\, Q = 0{,}2083 \,.\, Q.$$

Hieraus erhellt zugleich, wie bedeutend die Reibung bei der Schraube, gegenüber den vorher betrachteten einfachen Maschinen ist.

§. 96.

Ist die Umdrehungskraft der Schraube nicht unmittelbar im Umfange des mittleren Cylinders thätig, sondern wirkt eine solche, deren Größe P ist, in der rechtwinkeligen Entfernung $AC = R$ von der Axe AB. Fig. 73, so muß in Bezug auf vorigen §. sein

$$PR = pr;$$

demnach ist aber

$$\text{I. } P = \frac{r}{R} \,.\, Q \frac{h \pm 2r\pi f}{2r\pi \mp fh}$$

Hierbei ist P als im Umfange der Axe AB gleichmäßig vertheilt angenommen; ist dieß nicht der Fall, so muß die durch einseitige Wirkung entstehende Reibung, an den äußeren cylindrischen Flächen der Mutter und Gänge, besonders in Rechnung gebracht werden.

Zu diesem Ende sei der vertikale Abstand der Ebene, in welcher P wirkt, von den Ebenen ED und GF der Mutter durch a und b, sowie die Höhe $DF = l$ gegeben.

Sodann erhält man als Druck in der Richtung $DE : P\frac{b}{l}$;

eben so » » » » $FG : P\frac{a}{l}$.

Für die hierdurch entstehende Reibung folgt aber

$$\frac{fP}{l}(b + a);$$

demnach aus I., wenn man die letztere Reibung am Radius $r' > r$ wirkend annimmt, die Momentengleichung

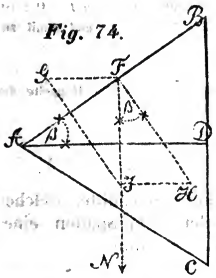
$$\text{II. } PR = rQ \frac{h \pm 2r\pi \,.\, f}{2r\pi \mp fh} + \frac{fP}{l}(b + a)\, r'.$$

Hat die Schraube, statt des in der Axenrichtung angehangenen Gewichtes Q, einen Widerstand am untern Ende B Fig. 72. fortzudrücken, so ist die Reibung des stehenden Zapfens nach §. 72. in Rechnung zu bringen. Hat die Schraube nur eine

drehende Bewegung, die Mutter aber eine fortschreitende (Fig. 72), so ist die Reibung in den Führungen der letztern gehörig zu beachten. Ist endlich die Kraft am Umfange der Mutter thätig, indem sich dieselbe dreht, die Schraube aber nur geradlinig fortrückt, so kann auch dieser Fall bei aufmerksamer Betrachtung alles bisher Aufgestellten keine Schwierigkeiten darbieten.

§. 97.

Fig. 74.



Für die scharfgängige Schraube sind die vorstehenden Sätze nur dann anwendbar, wenn die Reibung unbeachtet gelassen wird. Soll aber letztere in Rechnung kommen, so ist, wie nachstehend, zu verfahren.

Es sei ABC. Fig. 74. der Durchschnitt eines dreiseitigen Schraubenganges, FJ die Richtung des vertikal abwärts wirkenden Druckes $= N$, die Richtung der Kraft P aber horizontal. Zerlegt man N nach horizontalen und auf AB normalen Richtungen, so können nur die Normalpressungen als Reibung erzeugend übrig bleiben, da sich sämmtliche Horizontalpressungen, als einander entgegenwirkend, aufheben müssen. Ist nun der Neigungswinkel der schiefen Schraubenfläche gegen den Horizont in der nach der Axe gehenden Richtung gemessen, d. i. $\angle BAD = \beta$, so erhält man, wenn übrigens die frühern Bezeichnungen beibehalten werden,

$$FJ = N = FH \,.\, \cos\beta.$$

Nach (3) §. 93. ist

$$N = P\sin\alpha + Q\cos\alpha, \text{ demnach}$$

$$FH = \frac{P\sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Ohne Reibung würde aber sein

$$P\cos\alpha = Q\sin\alpha;$$

daher mit Berücksichtigung derselben

$$P\cos\alpha = Q\sin\alpha \pm f\,\frac{P\sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\beta}\,{}^{*)};\ \text{d. g.}$$

$$P\cos\beta = Q tg\alpha\cos\beta \pm fP tg\alpha \pm fQ;$$

$$\text{I.}\quad P = Q\,\frac{tg\alpha\cos\beta \pm f}{\cos\beta \mp f tg\alpha} = Q\,\frac{h\cos\beta \pm 2r\pi f}{2r\pi\cos\beta \mp fh}.$$

---

*) Unter sonst gleichen Umständen ist daher die Reibung bei der scharfgängigen Schraube größer wie bei der flachgängigen.

Für $\beta = o$, erhält man hieraus, wie ganz richtig,

$$\text{II. } P = Q\,\frac{tg\alpha \pm f}{1 \mp f tg\alpha},$$

die Gleichung der flachgängigen Schraube.

Beispiel. Für größere hölzerne Schrauben (mit scharfem Gewinde) erhält man gute Verhältnisse, wenn der äußere Durchmesser ($2r_2$) gleich der vierfachen Steigung ($= 4h$) und der Vorsprung AD Fig. 74. gleich $\frac{3}{4}\,BC = \frac{3}{4}\,h$ genommen wird. Man soll für eine derartige Schraube die Tangentialkraft P berechnen, welche einem Axendrucke Q nebst der dadurch entstehenden Reibung das Gleichgewicht hält, wenn $f = 0{,}1$ ist.

Auflösung. Hiernach berechnet sich $\alpha = 5^0\,36'$, $\beta = 33^0\,41'$ und somit zufolge I:

$$P = 0{,}2207 . Q.$$

Mit Hinweglassung der Reibung wäre

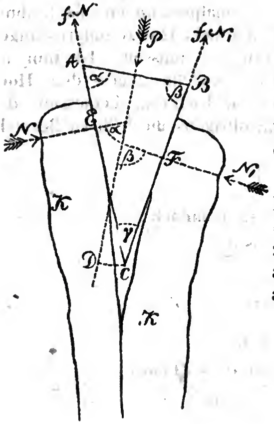
$P = 0{,}0979\,Q$, so daß die Reibung mehr als das Doppelte der Nutzlast ausmacht.

Der Keil.

§. 98.

Jedes normale Prisma mit dreiseitigem Querschnitte, welches zum Auseinandertreiben zweier Körper oder zum Spalten eines und desselben Körpers dient, wird ein Keil genannt.

Fig. 75.



Ist ABC. Fig. 75. der rechtwinkelige Querschnitt eines Keiles, so nennt man AC und CB die Seiten, AB den Rücken oder Kopf, C die Schärfe und eine von C auf AB gefällte Normale die Höhe desselben.

In dem Folgenden soll die Kraft P immer winkelrecht auf den Rücken des Keiles und die zu überwältigenden Widerstände als normal auf die Seiten wirkend angenommen werden *).

§. 99.

Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts zwischen der Kraft P und den Widerständen läßt sich, wie nachstehend, ermitteln.

*) Letzteres dem Grundsatze des §. 31. entsprechend.

Die Widerstände an den Punkten E und F des Keiles, wo sich die Seitenflächen gegen den festen Körper K stützen, mögen N und N_1, und die drei Winkel des Dreiecks ABC, α, β und γ sein; das eigene Gewicht des Keiles werde vernachlässigt.

Die Reibungen, welche dann längs der Seitenflächen auftreten, sind fN und $f_1 N_1$, wenn f und f_1 die beziehlichen Reibungscoefficienten bezeichnen; außerdem werde angenommen, daß sämmtliche Kräfte P, N, N_1, Nf und $N_1 f_1$ in einer Ebene wirken.

Zerlegt man jetzt alle vorhandenen Kräfte nach zwei Richtungen, wovon die eine parallel, die andere aber normal zur Richtung AB des Kopfes ist, und fällt man von irgend einem Punkte der Ebene ABC aus, z. B. von C, eine Normale CD auf die Richtung der Kraft P, so erhält man nach §. 18. für das vollständige Gleichgewicht die drei Gleichungen

$$\text{I. } P - N\cos\alpha - N_1\cos\beta - fN\sin\alpha - N_1 f_1 \sin\beta = o;$$
$$\text{II. } N\sin\alpha - N_1\sin\beta - fN\cos\alpha + f_1 N_1\cos\beta = o;$$
$$\text{III. } P.CD - N.CE + N_1.CF = o.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen enthalten die Bedingung, daß keine fortschreitende, die letztere Gleichung eben so, daß keine drehende Bewegung des Keiles erfolgt.

Hieraus lassen sich aber die Werthe von N, N_1 nnd CD berechnen, wenn P, CE und CF gegeben sind, wie dieß immer angenommen werden kann.

Für die meisten Fälle der Anwendung ist jedoch $\alpha = \beta$, auch $f = f'$ zu setzen, wobei sich die Richtungen von P, N und N_1 in einem einzigen Punkte schneiden müssen, $N = N_1$ wird, die Gleichungen II. und III. ganz wegfallen und aus I. folgt

$$P - 2N\cos\alpha - 2fN\sin\alpha = o, \text{ d. i.}$$
$$P = 2N(\cos\alpha + f\sin\alpha),$$ oder wenn man statt α den Winkel $= \gamma$ (an der Schneide) einführt

$$\text{IV. } P = 2N(\sin\tfrac{1}{2}\gamma + f\cos\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Hierbei bezeichnet P die Kraft, welche normal gegen den Kopf des Keiles wirken muß, um den Gegendrücken N, so wie den durch letztere hervorgerufenen Reibungen das Gleichgewicht halten zu können.

Die Kraft, welche erforderlich ist, um den Keil, mit Benutzung der Reibung, bloß an seinem Platze zu erhalten, erhält man aus IV., wenn f negativ genommen wird, zu

$$\text{V. } P = 2N(\sin\tfrac{1}{2}\gamma - f\cos\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Mit dieser Kraft bestrebt sich zugleich der Keil zurückzuspringen, und was so lange statt finden wird, als $\sin\frac{1}{2}\gamma > f\cos\frac{1}{2}\gamma$, d. i. $tg\frac{1}{2}\gamma > f$ ist. Für $tg\frac{1}{2}\gamma = f$ wird $P =$ Null, d. h. das

Zurückspringen des Keiles wird allein durch die Reibung verhindert. Ist endlich $tg\,\frac{1}{2}\gamma < f$, so wird P negativ, d. h. es kann sodann in der Axenrichtung nach auswärts noch eine Kraft P wirken, ohne daß der Keil zurückgeht.

Statt V. läßt sich sodann setzen

$$\text{VI. } P = 2N(f \cos \tfrac{1}{2}\gamma - \sin \tfrac{1}{2}\gamma).$$

Für $\gamma =$ Null, wird aus I. und II. $P = \pm 2fN$, so wie $N = \pm \frac{P}{2f}$ und wenn auch $f =$ Null gesetzt wird, aus letzterem Werthe, $N = \infty$ *).

Ohne Rücksicht auf Reibung erhält man auch aus IV. oder V:

$$\text{VI. } P = 2N \sin \tfrac{1}{2}\gamma.$$

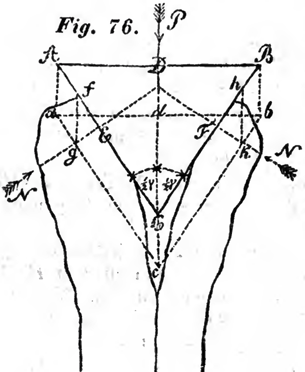


Fig. 76.

Zusatz. Mit Hülfe des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten lassen sich die vorstehenden Sätze ebenfalls herleiten und zwar zunächst die Gleichung VI., wie folgt.

Man denke sich den Keil in der Richtung von P um den Weg $Dd = w$ Fig. 76. fortbewegt, also in die Lage abc gebracht, so kommt der Angriffspunkt D nach d, und die Reibung hat den Weg $Fh = Ef$ zurückgelegt.

Nach §. 34. ist hiernach für den Zustand des Gleichgewichts

$$P \,.\, Dd - N \,.\, Eg - N \,.\, Fk - fN \,.\, Ef - fN \,.\, Fh = o,$$

oder auch

$$P \,.\, fg - 2N \,.\, Eg - 2fN \,.\, Ef = o.$$

Es ist aber, wenn $\angle ACD = \angle DCB = \frac{1}{2}\gamma$, $Eg = fg \,.\, \sin \frac{1}{2}\gamma$; $Ef = fg \,.\, \cos \frac{1}{2}\gamma$, daher, wenn man diese Werthe substituirt,

$$P \,.\, fg - 2N \,.\, fg \sin \tfrac{1}{2}\gamma - 2fN \,.\, fg \cos \tfrac{1}{2}\gamma = o;$$

Hieraus sodann

$$P = 2N(\sin \tfrac{1}{2}\gamma + f \cos \tfrac{1}{2}\gamma).$$

---

*) Denkt man sich in diesem Falle P als das Gewicht eines Körpers der zwischen zwei Vertikalebenen eingeklemmt ist und jede derselben in einem Punkte berührt, so würden unendlich große Gegendrücke erforderlich sein, um den Körper ohne Zuziehung der Reibung, zwischen den gedachten Ebenen im Gleichgewichte zu erhalten.

Anmerkung. In Betreff der höchst zahlreichen Anwendungen der vorstehenden Sätze vom Keile, auf die Theorie der Keilpresse, Kegel-Hähne und Kegel-Bremsen, allerlei Schneid- und Stoßwerkzeuge etc., muß auch hier auf die Maschinenlehre verwiesen werden.

Sechstes Kapitel.

Von der Festigkeit der Körper.

§. 100.

Unter Festigkeit (Cohäsion) eines Körpers versteht man die Kraft, mit welcher die Theile desselben zusammenhängen und der Ausdehnung, Biegung, Verschiebung u. d. g. oder der Trennung widerstehen.

Wir folgen hier der bisher (namentlich in Deutschland) üblichen Eintheilung und unterscheiden nach der Art und Weise, wie die Festigkeit eines Körpers in Anspruch genommen wird:

1) die absolute Festigkeit oder diejenige Kraft, mit welcher ein Körper dem Zerreißen widersteht, wenn derselbe an einem Ende, der Länge nach, in der Richtung seiner Axe und Fasern, gezogen oder gespannt wird, während das andere Ende befestigt ist, oder wenn an beiden Enden ziehende Kräfte wirken;
2) die respective oder relative Festigkeit, oder diejenige Kraft, mit welcher ein Körper einem auf seine Längenrichtung senkrecht ausgeübten Drucke oder Zuge bis zum Zerbrechen widersteht;
3) die rückwirkende Festigkeit oder die Kraft, mit welcher sich ein Körper dem Zerdrücken widersetzt und
4) die Drehungs- oder Torsions-Festigkeit, oder die Kraft, mit welcher ein Körper dem Zerdrehen widersteht, was z. B. geschieht, wenn ein Stab an einem Ende festgehalten und am andern Ende um seine Axe gedreht wird.

Außerdem könnte man noch die Quer- und Spaltungsfestigkeit unterscheiden oder die Kräfte, welche sich respective einer Trennung nach der parallelen Lage der Fasern, oder der Trennung durch einen zwischen die Fasern oder Fibern eindringenden, keilförmigen Körper entgegensetzt, so wie endlich die Festigkeit gegen Verschiebung, welche sich dann äußert, wenn man sich bestrebt, die Theile eines Körpers über einander wegzuschieben, wie z. B. wenn die Gänge einer Schraube von der Spindel abgedrückt werden.

Zusatz. Bei vorstehender Eintheilung ist vorausgesetzt, daß die Kräfte, welche die Festigkeit eines Körpers in Anspruch nehmen, als Druck oder Zug, nicht aber plötzlich, als Stöße, Erschütterungen etc. wirken. In dem ganzen gegenwärtigen Kapitel denken wir uns allein Kräfte ersterer Art thätig, während die Einwirkung der zweiten Classe von Kräften auf die Festigkeit, in der Dynamik ausführlich behandelt werden wird. Wir bemerken daher zunächst blos, daß der Widerstand, welchen feste Körper gegen plötzlich einwirkende Kräfte zeigen, „lebendiger Widerstand" (résistance vive), oder „Abprallungs-," Stoß-Widerstand (resilience) genannt wird.

§. 101.

Vermöge derjenigen Eigenschaft aller Körper, welche Elasticität genannt wird, die ihnen durch Einwirkung einer äußeren Kraft aufgedrungene Veränderung ihrer ursprünglichen Gestalt von selbst wieder aufzuheben, erleiden dieselben vor der Trennung der Theile eine mehr oder weniger bemerkbare Formänderung, d. i. eine Drehung, Biegung, Verkürzung u. s. f.

Körper, die zwar ihre Form ändern, aber nachdem die Einwirkung aufgehört hat, ihre ursprüngliche Gestalt vollständig wieder annehmen, nennt man vollkommen elastisch; stellen sie jedoch ihre erste Gestalt nur theilweise wieder her, so heißen sie unvollkommen elastisch. Erfolgt eine Trennung der Theile, ohne daß eine merkliche Formänderung vorangeht, so nennt man die Körper spröde, ferner hart, wenn beinahe durch keine Gewalt eine Formänderung möglich ist, und endlich werden sie weich genannt, wenn durch eine geringe Kraft eine bleibende Formänderung erzeugt werden kann.

Das Maß der größten Kraft, welche ein Körper auszuhalten vermag, ohne eine bleibende Ausdehnung, Biegung u. s. f. zu erleiden, bezeichnet die Grenze der vollkommenen Elasticität für denselben. Das Maß für die Festigkeit ist dagegen diejenige Kraft, bei welcher die Formänderung nicht weiter fortschreiten kann, ohne daß eine wirkliche Trennung erfolgt.

§. 102.

Die Größe aller bis jetzt aufgeführten Widerstände ist sowohl nach der natürlichen Beschaffenheit der Körper, als auch nach zufälligen Umständen verschieden. So hängt die Festigkeit der Metalle davon ab, ob sie gegossen, gehämmert oder gewalzt sind, schnell oder langsam abgekühlt wurden, von zufälligen Blasen, Sprüngen u. d. g. m. Bei den Holzarten kommt es auf das Klima an, in welchem sie gewachsen sind, auf die Beschaffenheit des Bodens, auf ihren Standort, auf das Alter, ferner darauf, ob die Holzstücke von der Wurzel, dem Stamme, dem Kerne oder Splinte sind u. s. w. Deshalb sind aber auch die

Resultate der genauesten Versuche, welche über Festigkeit der Körper angestellt wurden und die wir später aufführen werden, immer nur als Mittelwerthe anzusehen, so daß es in sehr wichtigen Fällen am gerathensten bleibt, directe Versuche hierüber entscheiden zu lassen.

In Beziehung auf Festigkeit ist ein Körper gleichartig, wenn gleiche Theile desselben gleiche Festigkeit haben und die Richtung und Lage der Trennungsfläche keinen Unterschied hierin erzeugt; im Gegentheil wird der Körper ungleichartig genannt.

Werden in der Folge die Festigkeiten zweier oder mehrer Körper von einerlei Materie mit einander verglichen, so werden dieselben immer als gleichartig angesehen, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

Die absolute Festigkeit.

§. 103.

Aus zahlreichen Versuchen, welche man hinsichtlich der absoluten Festigkeit anstellte und wozu man sich meistentheils eines auf dem Principe des ungleicharmigen Hebels beruhenden Zerreißapparates bediente *), weiß man mit völliger Bestimmtheit, daß die Festigkeit prismatischer Körper mit der Größe des Querschnittes in geradem Verhältnisse steht.

Bezeichnet man daher die Querschnittsflächen zweier Körper mit a und A, die Größe der in der Axenrichtung wirkenden Kräfte oder Gewichte, welche das Zerreißen bewirken und daher für die Festigkeit selbst gesetzt werden können, mit q und Q, so muß die Proportion stattfinden

$$q : Q = a : A.$$

Hieraus folgt

$$(1)\quad Q = \frac{q}{a} \cdot A.$$

Kennt man daher aus Versuchen die Größe des Gewichtes q, welches einen Körper von der Einheit des Flächenmaßes, $a = 1$, zu zerreißen vermag, so kann die Berechnung für einen andern Körper derselben Materie vom Querschnitte A leicht geschehen. Wir setzen hier voraus, daß man die Größe von q in Kilogrammen kennt, bei welcher Körper von 1 Quadratmillimeter Querschnitt zerrissen werden, bezeichnen den Quotienten $\frac{q}{a}$ mit m und nennen diese Zahl das Maß oder den Coefficienten der absoluten Festigkeit. Aus (1) folgt daher

*) Genaue Abbildungen und Beschreibung eines solchen mit der hydraulischen Presse in Verbindung gesetzten Apparates findet man in Barlow's Werke: A Treatise on the Strength etc. of Materials. London 1837.

I. $Q = m \, . \, A$, d. h.

die absolute Festigkeit eines prismatischen Körpers wird gefunden, wenn man den Querschnitt desselben mit dem entsprechenden Festigkeitscoefficienten multiplicirt.

Mit Berücksichtigung des Gewichtes $= G$ des Körpers erhält man statt I.

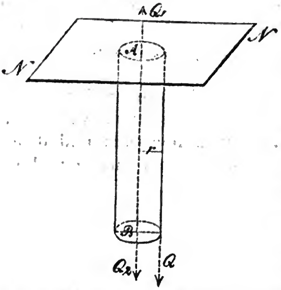
II. $Q + G . = m \, . \, A$,

sowie, wenn der Körper vermöge seines eigenen Gewichtes zerreißen soll, wobei $Q = o$ wird,

III. $G = m \, . \, A$.

Zusatz. Wirkt die Kraft, welche die absolute Festigkeit eines Körpers in Anspruch nimmt, nicht, wie bisher angenommen, in der Richtung der Längenaxe des Körpers, sondern in einer Parallelebene zu dieser, so leistet der Körper einen geringeren Widerstand gegen das Zerreißen.

Fig. 77.



Um dies nachzuweisen nehmen wir an, daß, wie in Fig. 77, eine Kraft Q vertikal abwärts im Mantel eines bei MN gehörig befestigten Cylinders AB, mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser $= r$, wirkt.

Wir versetzen Q nach §. 29. parallel zu sich selbst in die Axenrichtung AB und erhalten dadurch eine Einzelkraft Q_2 ($= Q$), deren Wirkung auf das Zerreißen des Körpers ganz die der vorher betrachteten Fälle ist; außerdem ergiebt sich aber ein Paar $Q \, Q_1$, dessen Energie oder Moment $= Qr$ die Bruchfestigkeit des Körpers in Anspruch nimmt. Weiter unten werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

§. 104.

Tabelle I. *)

Werthe des Coefficienten (= m) der absoluten Festigkeit verschiedener Körper in Kilogrammen, für 1 Quadratmillimeter Querschnitt.

Name des Körpers	m	Name des Körpers	m
Ahornholz	12,23	Lindenholz	9—15
Birkenholz	13,7	Pappelholz	5—7
Birnbaumholz	6,9—8	Pflaumenbaumholz	6—9
Buchenholz (Rothbuche)	8—15	Roßkastanienholz	8
Buchsbaumholz	10—13	Tannenholz (Weißtanne)	8—10
Eichenholz	6—14	Teakholz (indische Eiche)	5—10
Erlenholz	9—16	Ulmenholz	9—11
Eschenholz	11—14	Weidenholz	8—14
Fichtenholz (Rothtanne)	7—10	Weißbuchenholz (Hainbuche)	13—14
Kiefernholz (Föhre)	8—14		
Lärchenholz	6,25		
Blei, gegossen	1,2—1,4	Glasröhren	1,6—3,2
„ gewalzt	0,84—1,65	Gußeisen	9—15
„ draht	1,4—2,5	Kanonenmetall	19—25
Eisen, geschmiedet	30—60	Kupfer, gegossen	13
Eisenblech in d. Walzrichtung	36—45	„ geschlagen	25
Eisenblech rechtwinkelig darauf	33—39	„ gewalzt	20—26
Eisendraht, Durchmesser in Millim.: 0,23	90	„ draht	40—70
„ 0,5—1,0	70—86	Messing, gegossen	12
„ 1—3	64—74	„ draht	40—85
Eiserne Ketten, längliche Glieder	24	Stahl	75—96
Eiserne Ketten, verstärkt durch Stege	32	„ gegossen	94—100
		„ als Uhrfedern	140—188
		Zink, gegossen	6
		„ gewalzt	5
Hanfseil, trocken	5—9	Lederriemen zum Maschinenbetriebe	2

*) Vollständigere Zusammenstellungen von Versuchsresultaten über Festigkeit der Körper findet man in nachbenannten Werken:
Jahrbücher des k. k. polytechn. Institutes in Wien. Bd. 19 und 20. — Introduction a la mécanique Industrielle, par Poncelet. Paris, 1841. — Traité de l'Exploitation des Mines, par Combes. Paris, 1844. Tome I. — The Mechanical Principles of Engineering etc. by Moseley. London, 1843.

Tabelle II.

Parallelcohäsion einiger Körper, pr. Quadratmillimeter in Kilogrammen.

a. Querfestigkeit (rechtwinklig auf die Faserrichtung).

Name des Körpers	m	Name des Körpers	m
Eichenholz	1,63	Lärchenholz	0,68—1,19
Kiefernholz (Föhre) .	0,39—0,59	Pappelholz	1,25

b. Verschiebungsfestigkeit (längs der Faserrichtung).

Eschenholz	0,57	Tannenholz	0,42

Zusatz 1. Der Sicherheit wegen nimmt man von den Werthen der Tabelle I. für praktische Anwendungen bei Hölzern und Riemen den 10ten, bei Metallen den 6ten Theil, bei Hanfseilen die Hälfte in Rechnung.

Zusatz 2. Der Proceß des Ausgleichens (Nachlassens) bei Metallen vermindert deren absolute Festigkeit und zwar bei Eisendrähten um $\frac{1}{3}$, bei sehr dünnen Drähten beinah um $\frac{1}{2}$.

Zusatz 3. Getheerte Hanfseile tragen nur $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ so viel als ungetheerte. Nasse Seile tragen nur $\frac{1}{3}$ so viel als trockene. Das Gewicht in Kilogrammen, welches ein gutes, trockenes Hanfseil mit Sicherheit tragen kann, läßt sich mittels der Formel berechnen $12\,c^2$, wobei c den Umfang des Seiles in Centimetern bezeichnet. Ein Drahtseil aus Drähten von a Millimeter Dicke (Gewöhnlich 3,3 Millimeter) und aus n Fäden bestehend trägt (nach Freiberger Erfahrungen) mit 7facher Sicherheit eine Last von $6{,}5 . a^2 . n$ Kilogrammen, jedoch ohne Beachtung des eigenen Gewichts.

Beispiel 1. Es ist der Querschnitt einer 3,16 Meter langen Hängesäule zu bestimmen, welche aus Lärchenholz gezimmert, bei einer Brücke auf die Dauer 14000 Kilogr. mit Sicherheit zu tragen vermag.

Auflösung. Den betreffenden Werth des Coefficienten m der Tabelle I. zum 10ten Theile genommen, ergiebt sich sofort

$A = \frac{14000}{0{,}6} = 23333$ Quadratmillimeter, wofür man 2,4 Quadratdecimeter setzen und etwa 1,2 Decim. zur Dicke und 2 Decim. zur Breite nehmen wird.

Das eigene Gewicht der Hängesäule kann man hierbei vernachlässigen, indem dasselbe, wenn die Dichte des Lärchenholzes = 519 Kil. genommen wird, nicht mehr als 39,4 Kil. beträgt.

Beispiel 2. Welcher Spannung kann ein aus Kernleder verfertigter Maschinenriemen auf die Dauer und ohne nachtheiliges Recken widerstehen, dessen Dicke 4 Millimeter und dessen Breite 72 Millim. beträgt.

Auflösung. Um das bemerkte Recken zu vermeiden, nehmen wir $m = 0{,}1$, daher die zulässige Spannkraft $= 0{,}1 . 4 . 72 = 28{,}8$ Kilogr.

Beispiel 3. Wie groß hat man den Umfang eines Hanfseiles zu nehmen, mittels welchem auf einer Eisenbahnstrecke von $\frac{1}{30}$ Steigung, Wagenzüge von durchschnittlich 80 Tonnen Bruttogewicht aufwärts gezogen werden sollen.

Auflösung. Einschließlich des Luftwiderstandes kann man im ungünstigsten Falle statt der §. 73. gefundenen 6 ℔ Zugkraft pr. Tonne (auf der Horizontale) 8 ℔ rechnen. Sodann erhält man als Spannkraft:

8. 80 = 640 ℔ für die Horizontale,

$\frac{8.2240}{30}$ = 5973 ℔ als Vergrößerung wegen der schiefen Ebene §. 92,

endlich = 800 ℔ annäherungsweise für die Seilbiegung.

7413 ℔ engl. = 3370 Kil.

Daher nach §. 104. Zusatz 3:

12. $c^2 = 3370$ und hieraus $c = 17$ Centimeter Umfang.

§. 105.

Um die Ausdehnung der Körper innerhalb der Grenze der vollkommenen Elasticität gehörig beurtheilen und berechnen zu können, mögen l und L die Längen zweier prismatischer Körper, so wie ε' und ε die Ausdehnungen derselben innerhalb der gedachten Grenze bezeichnen, welche respective durch Gewichte q und Q erzeugt werden.

Da man auch hier aus der Erfahrung weiß, daß sich unter vorstehender Bedingung die Ausdehnungen gerade wie die ziehenden Gewichte und wie die Längen, aber umgekehrt wie die Querschnitte (a, A) verhalten, so läßt sich die Proportion herleiten

$$(1)\quad \varepsilon' : \varepsilon = \frac{ql}{a} : \frac{QL}{A}.$$

Bezeichnet man ferner die Ausdehnung $= \varepsilon'$, welche ein Gewicht $q = 1$ Kilogr. in einem Prisma vom Querschnitt $a = 1$ Quadratmillimeter und der Länge $l = 1$ hervorbringt, mit $\frac{1}{E}$, so folgt aus (1)

$$\frac{1}{E} : \varepsilon = 1 : \frac{QL}{A}, \text{ d. g.}$$

$$\text{I.}\quad \varepsilon = \frac{Q.L}{A.E};$$

oder da der Quotient $\frac{Q}{A}$ das Gewicht sein muß, womit der Querschnitt = 1 belastet oder in Anspruch genommen wird, so erhält man, wenn man dieses Gewicht mit m' bezeichnet,

$$\text{II.}\quad \varepsilon = m' . \frac{L}{E}.$$

Setzt man in letzterer Formel $\varepsilon = L$, so wird $E = m'$. Die Größe E bezeichnet also das erforderliche Gewicht, um einen prismatischen Körper von 1 Quadratmillimeter Querschnitt, um die eigene Länge auszudehnen.

In der Folge soll E der Modul der Elasticität genannt werden *).

*) Die Größe E für verschiedene Körper aus directen Versuchen zu bestimmen, gewährt zu wenig Sicherheit, man leitet sie deshalb lieber aus der Biegung der Körper ab, wovon in später folgenden Paragraphen die Rede sein wird.

Von diesem Modul, als dem Maße der Spannkraft, ist die vorher erwähnte Grenze zu unterscheiden, innerhalb welcher die Spannkraft noch unverkürzt besteht. So weiß man, daß E für weiches Eisen und gehärteten Stahl ziemlich gleich ist, während den letzteren doch unbedingt eine größere Elasticität zugeschrieben werden muß. Man nennt deshalb E auch die Intensität oder Qualität der Spannkraft, die Grenze aber, innerhalb welcher eine größere von selbst zurückgehende Dehnung noch zulässig ist, die Quantität der Spannkraft.

Um die größte Ausdehnung $= \delta$ auf die Länge $L = 1$ zu berechnen, welche innerhalb der Elasticitätsgrenze möglich ist, muß man statt m' solche Werthe in Rechnung bringen, bei welchen die Körper noch keine bleibende Formänderung erfahren. Die größten zulässigen Belastungen mit p bezeichnet, ergiebt sich aus II:

$$\text{III.} \quad \delta = \frac{p}{E}.$$

Man erkennt ferner leicht, daß die Größe p statt m in die Formeln des §. 103. eingeführt werden kann, so daß man z. B. aus I. erhält

$$\text{IV.} \quad Q = p\,A.$$

Zusatz 1. Innerhalb gewisser Grenzen sind die im Vorstehenden für die Ausdehnung der Körper entwickelten Sätze auch für die Zusammendrückbarkeit derselben als gültig zu betrachten. Aus den zur Zeit hierüber bekannten Versuchen läßt sich jedoch entnehmen, daß die Gleichheit des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern oder Fiebern, beim Schmiedeeisen beinah noch über die Elasticitätsgrenze hinaus fortbesteht; bei Hölzern etwas vor Erreichung letztgedachter Grenze bereits aufhört und zwar sodann die Kraft zum Ausdehnen größer wie die zum Zusammendrücken wird; endlich aber beim Gußeisen (und wahrscheinlich bei allen gegossenen Metallen, ferner bei den Steinen) diese Gleichheit weit vor dem Punkte, wo die Elasticitätsgrenze erreicht wird, aufhört und hier sehr bald die Kraft zum Zusammendrücken größer wird, als die zum Ausdehnen erforderliche ist.

Weiter unten werden wir auf diese wichtigen Fragen ferner einzugehen hinlängliche Gelegenheit finden, für den Techniker, den Constructeur erwachsen indeß schon aus den hier gemachten Bemerkungen beachtungswerthe Andeutungen.

Zusatz 2. Gleichfalls neuere Versuche (namentlich von Hodgkinson)*) lassen sogar an der völligen Richtigkeit des oben zur Basis der betreffenden Betrachtungen genommenen Satzes zweifeln, daß nämlich innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibende Formveränderungen durch äußere Kräfte nicht bewirkt werden können und daß sich erstere wie die einwirkenden Kräfte verhalten. Vielmehr wird behauptet, daß unter allen (?) Umständen, außer den nach Entfernung

*) Civil Engineer Journal, 1843, p. 354.

der Kräfte verschwindenden Formänderungen noch andere bleibende (aus der Veränderung des Zusammenhanges der kleinsten Körpertheilchen hervorgehende) statt finden, welche sich wie die Quadrate der einwirkenden Kräfte verhalten sollen. Bevor jedoch hierauf weitere Schlüsse und namentlich Rechnungen zu basiren sind, dürfte es nöthig sein, ausführlichere Versuche und weitere Resultate abzuwarten.

§. 106.

Tabelle, welche die Werthe von δ, p und E in Kilogrammen für Körper von 1 Quadratmillimeter Querschnitt angiebt *).

Name des Körpers	δ	p	E
Hölzer	$\frac{1}{850} = 0{,}00117$	1,521	1300
Eisendraht	$\frac{1}{600} = 0{,}00166$	33	20000
Gußeisen	$\frac{1}{1200} = 0{,}00030$	3,3	11000
Schmiedeeisen	$\frac{1}{1520} = 0{,}00060$	12	20000

Beispiel. Wie groß ist die Ausdehnung einer schmiedeeisernen Stange von 28 Quadratcentimeter Querschnitt und 2 Meter Länge, welche durch ein Gewicht von 11200 Kil. nach der Längenrichtung gespannt wird?

Nach II. §. 105. ist

$$\varepsilon = m' \frac{L}{E};$$

demnach für vorstehende Zahlenwerthe:

$$m' = \frac{11200}{2800} = 4; \quad E = 20000;$$

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{4}{20000} \cdot L = \frac{1}{5000} \cdot L;$$

folglich auf 2 Meter Länge

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{1}{2500}.$$

Für die größte Ausdehnung des Schmiedeeisens innerhalb der Elasticitätsgrenze ist aber:

$$\delta = \frac{1}{1520}, \text{ d. h.}$$

die Ausdehnung der Stange ist noch lange keine bleibende.

---

*) Die außerordentliche Verschiedenheit dieser Größen nach der zur Zeit desfallig angestellten Versuchen, bestimmte uns, hier nur Angaben aufzunehmen, wie sie der praktische Rechner bedarf und die namentlich mit den Versuchsresultaten von Ardant, Brix, Duleau und Hodgkinson übereinstimmen. Man sehe hierüber die vorher citirten Werke, so wie Brix Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse der Eisendrähte. Berlin, 1837.

§. 107.

Bei Körpern von beträchtlicher Länge wird oft das eigene Gewicht so bedeutend, daß es nöthig ist, wenn in allen Querschnitten die absolute Festigkeit gleichgroß sein soll, denselben eine nach unten abnehmende Stärke zu geben.

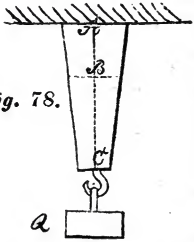


Fig. 78.

Um das Gesetz dieser Abnahme zu ermitteln, sei ABC Fig. 78. der an seinem oberen Ende befestigte Körper, welcher am unteren Ende ein Gewicht $= Q$ trägt. Der Querschnitt der unteren Fläche sei $= a$, so wie z der Querschnitt in einer beliebigen Höhe $CB = x$, ferner bezeichne γ das Gewicht der Cubikeinheit der körperlichen Masse.

Man denke sich die Höhe x in unendlich kleine, aber gleichgroße Theile von der Höhe $= \delta$ getheilt und setze die von C aus auf einander folgenden Querschnitte der Elemente beziehlich y_1, y_2, y_3, ... y_n.

Nach §. 103. ist für den untersten Querschnitt

(1) $a = \frac{Q}{m}$, ferner für den nächst folgenden, in der Entfernung y_1:

$$Q + a\delta\gamma = my_1, \text{ d. i. wegen (1)}$$

$$Q\left(1 + \frac{\delta\gamma}{m}\right) = my_1, \text{ oder wenn man } m = \frac{1}{k}$$

setzt und auf y_1 reducirt

$$(2)\quad y_1 = kQ\,(1 + \delta\gamma k).$$

Eben so ist: $my_2 = \frac{y_2}{k} = Q + a\delta\gamma + y_1\,\delta\gamma.$

Hier den Werth aus (2) und $a = \frac{Q}{m} = kQ$ gesetzt, giebt

$$\frac{y_2}{k} = Q + \delta\gamma k \,.\, Q + \delta\gamma k Q\,(1 + \delta\gamma k), \text{ d. i.}$$

$$y_2 = kQ\,(1 + \delta\gamma k)^2.$$

Auf analoge Weise erhält man

$$y_3 = kQ\,(1 + \delta\gamma k)^3;$$

$$y_4 = kQ\,(1 + \delta\gamma k)^4 \text{ u. s. f.}$$

$$y_n = Z = kQ\,(1 + \delta\gamma k)^n.$$

Wie in §. 82. läßt sich aber nachweisen, daß

$(1 + \delta\gamma k)^n = e^{n\delta\gamma k}$ ist; demnach, weil

$n\delta = x$ sein muß,

$Z = kQe^{x\gamma k}$; ferner wegen $k = \frac{1}{m}$:

I. $Z = \frac{Q}{m} \cdot e^{\frac{x\gamma}{m}} = ae^{\frac{x\gamma}{m}}$.

Verwandelt man I. in eine logarithmische Gleichung, so folgt für briggsche Logarithmen

II. $\text{Lg}\, Z = \text{Lg}\, a + 0{,}434 \frac{x\gamma}{m}$.

Beispiel. Man soll die Dimensionen einer Gestängstange von 60 Meter Länge bestimmen, deren Zweck ist, die auf- und abgehende Bewegung eines Balanciers auf den Kolben einer Bergwerks-Hebepumpe überzutragen. Das Material der Stange soll Tannenholz sein, dieselbe aus 6 Stücken von je 10 Meter Länge zusammengekuppelt werden und jedes dieser Stücken gleiche Tragkraft besitzen, wenn an dem untern Ende der Stange in der Axenrichtung eine Last von 5000 Kil. wirkt.

Auflösung. Nach der Tabelle I. ist hier zunächst $m = 0{,}8$ zu setzen, welchen Werth wir jedoch nur zum 4ten Theile in Rechnung bringen wollen, weil das Gestänge beim Niedergange auch eine Zusammendrückung erfährt, hierzu aber, wie bemerkt beim Holze, eine geringere Kraft erforderlich ist als zum Ausdehnen. Man erhält also zuerst, wenn b die Seite des quadratischen Querschnittes bezeichnet

$$5000 = 0{,}2\, b^2 \text{ und hieraus } b = 158 \text{ Millim.} = 0{,}158 \text{ Meter.}$$

Mit Hülfe der Gleichung II., wenn daselbst für x, auf einander folgend 10^m, 20^m .... 60^m, $b = 0^m{,}158$, $m = 200000$ und $\gamma = 650$ Kil. gesetzt wird, findet man die Seiten der betreffenden Querschnitte:

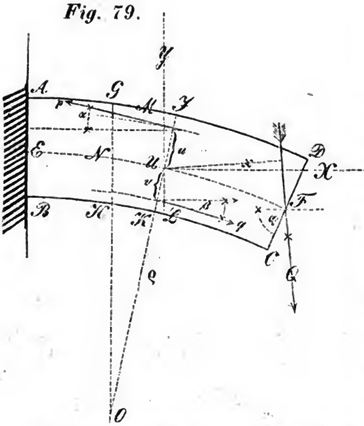
$$b_{10} = 0_m{,}160;\; b_{20} = 0{,}163;\; b_{30} = 0{,}166$$
$$b_{40} = 0{,}168;\; b_{50} = 0{,}171;\; b_{60} = 0{,}174.$$

Die respective Festigkeit.

§. 108.

Da, wie bereits §. 101. bemerkt wurde, allen Körpern ein gewisser Grad von Elasticität zugeschrieben werden kann, so mögen auch hier die Körper, deren respective Festigkeit untersucht werden soll, als aus dehnbaren und zusammendrückbaren Fasern bestehend angenommen werden.

Fig. 79.



Dies vorausgesetzt sei ***ABCD*** Fig. 79. ein prismatischer Körper, dessen Axe in der vertikalen Ebene liegen und der mit einem Ende in einer Wand ***AB*** gehörig befestigt sein mag. Gegen das freie Ende desselben wirke eine Kraft ***Q***, deren Richtung wir mit der vertikalen Schwerebene zusammenfallend annehmen wollen und deren Bestreben darin bestehen mag, den Körper in der Vertikalebene zu biegen.

Hierdurch erfahren offenbar die nach der convexen Seite ***AD*** hin liegenden Fasern des Körpers eine Ausdehnung (Verlängerung) und die nach der concaven Seite ***BC*** hin liegenden eine Zusammendrückung (Verkürzung). Zwischen den ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern muß es daher auch eine Schicht geben, welche sich völlig passiv gegen die eine wie die andere der bemerkten Veränderungen zeigt und welche man deshalb auch die neutrale Faserschicht zu nennen pflegt.

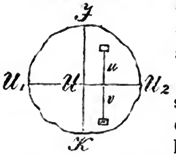
Stellt ***EF*** die Durchschnittslinie der neutralen Schicht mit der Vertikalebene vor, so nennt man diese Curve die elastische Linie und jede auf dieser normal stehende Gerade, welche zugleich in der gedachten Schicht liegt, eine neutrale Axe.

Begreiflicher Weise wird durch die Wirkung der Kraft ***Q*** in jeder einzelnen Faser des Körpers ein entsprechender Widerstand hervorgerufen, mit welchem sie sich der gedachten Veränderung entgegenstellt.

Unsere Aufgabe wird es nun sein, die Gleichgewichtsbedingungen zwischen diesen Widerständen und der Kraft ***Q*** abzuleiten und durch allgemeine Ausdrücke festzustellen.

Zu diesem Ende denken wir uns zwei sehr nahe liegende normale Querschnitte ***GH*** und ***JK*** gebildet, zwischen denen die sämmtlichen Fasern im ungebogenen Zustande die Länge λ haben, zufolge der Biegung aber respect. Verlängerungen und Verkürzungen erfahren, deren Größen dargestellt werden können, wenn man ***ML*** || ***GH*** zieht.

Fig. 80.



Zur weiteren Verständigung stelle Fig. 80. die Querschnittsfläche JK in der Vorderansicht dar, und $U_1\ U_2$ sei die neutrale Axe derselben.

Die Kräfte, welche sich statt der Widerstände der Fasern im gedachten Querschnitte denken lassen, nehmen wir tangential zu den betreffenden Fasern gerichtet an, machen auch ferner die statthafte Voraussetzung, daß diese Kraftrichtungen mit der Richtung von Q in parallelen Ebenen liegen.

Die Kräfte, womit die über der neutralen Schicht liegenden Fasern der Ausdehnung widerstehen, bezeichnen wir mit $p_1,\ p_2,\ p_3 \ldots . p_n$, die der unteren Schicht, welche gegen Zerdrückung Widerstand leisten, mit $q_1,\ q_2,\ q_3 \ldots . q_n$, die Richtungen derselben gegen den Horizont respective mit $\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots . \alpha_n$, und $\beta_1,\ \beta_2 \ldots . \beta_n$, ferner sei φ der Winkel, unter welchem die Richtung von Q gegen die Horizontale geneigt ist, endlich werde die neutrale Axe $U_1\ U_2$ als die Durchschnittslinie zweier respect. horizontaler und vertikaler Coordinatenebenen angenommen, auf welche wir das ganze System von Kräften beziehen.

Wir versetzen nun zuerst sämmtliche Kräfte in die neutrale Axe $U_1\ U_2$, bezeichnen die Breiten der von $p_1,\ p_2 \ldots$ und $q_1,\ q_2 \ldots$ erhaltenen Paare respect. mit $u_1,\ u_2 \ldots$ und $v_1,\ v_2 \ldots$ und setzen endlich die Breite von Q, d. i. $UT = x$.

Mit Rücksicht auf die Drehrichtung der Paare ergiebt sich sodann fürs Gleichgewicht

$$Qx - \Sigma\,(pu) + \Sigma\,(qv) = 0.$$

Die überdies erhaltenen, an der neutralen Axe angreifenden Einzelkräfte, zerlegen wir nach horizontalen und vertikalen Richtungen und erhalten:

$$\text{parallel zu } XX\colon Q \cos\varphi,\ \Sigma\,(p \cos\alpha),\ \Sigma\,(q \cos\beta),$$
$$\text{» » } YY\colon Q \sin\varphi,\ \Sigma\,(p \sin\alpha),\ \Sigma\,(q \sin\beta).$$

Versetzen wir endlich letztere Kräfte sämmtlich nach U, d. i. nach den (neuen) Angriffspunkt von Q, so ergeben sich von den mit Q in parallelen Ebenen wirkenden Kräften noch Paare, welche eine Drehung der neutralen Axe in der horizontalen Ebene veranlassen. Der Natur der Sache nach kann man diese ohne besondere Fehler vernachlässigen oder annehmen, die betreffenden Paare halten sich unter einander im Gleichgewichte. Sodann sind aber die Bedingungsgleichungen für das vollständige Gleichgewicht nachstehende drei:

$$Qx - \Sigma(pu) + \Sigma(qv) = 0;$$
$$Q\cos\varphi + \Sigma(p\cos\alpha) - \Sigma(q\cos\beta) = 0;$$
$$-Q.\sin\varphi + \Sigma(p\sin\alpha) - \Sigma(q\sin\beta) = 0\ ^{*)}.$$

In der ferneren Voraussetzung, daß die Biegungen der Fasern sehr gering sind, können α und β gleich Null gesetzt werden, so daß sich ergiebt

$$(1)\quad Qx = \Sigma(pu) + \Sigma(qv);$$
$$(2)\quad Q\cos\varphi = \Sigma(q) - \Sigma(p).$$

In letzteren beiden Gleichungen lassen sich nun respective p und q mit Hülfe von I. §. 105. näher bestimmen. Bezeichnet man nämlich den Querschnitt einer betreffenden Faser mit i, so ergiebt sich $p = \varepsilon\,.\,E\frac{i}{\lambda}$. Verlängert man überdies GH und JK bis sich diese Linien in einem Punkte O schneiden, so ist $OU = \varrho$ der Krümmungshalbmesser **) für das Bogenelement $NU = \lambda$ und es findet die Proportion statt: $\varrho : u = \lambda : \varepsilon$, daher sich p ergiebt zu: $p = \frac{E}{\varrho}iu$, so wie auf analoge Weise: $q = \frac{E}{\varrho}iv$. Hiernach wird aus (1) und (2)

$$(3)\quad Qx = \frac{E}{\varrho}\left\{\Sigma(iu^2) + \Sigma(iv^2)\right\};$$

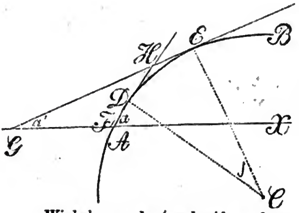
$$(4)\quad Q\cos\varphi = \frac{E}{\varrho}\left\{\Sigma(iv) - \Sigma(iu)\right\}.$$

---

*) Vorher wäre zu schreiben gewesen:

$$Q\cos(360 - \varphi) + \Sigma(p\cos\alpha) + \Sigma\left\{q\cos(180 + \beta)\right\} = 0;$$

$$Q\sin(360 - \varphi) + \Sigma(p\sin\alpha) + \Sigma\left\{q\sin(180 + \beta)\right\} = 0.$$



**) Unter dem Krümmungshalbmesser versteht man bekanntlich den Halbmesser desjenigen Kreises, der unter allen berührenden Kreisen mit irgend einem sehr kleinen Theile DE einer Curve AB am innigsten zusammenfällt. Ein für vorliegende Zwecke hinreichend genauer Ausdruck für denselben läßt sich, wie nachstehend, auffinden. Die Curve AB werde auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, AX sei die Abscissenaxe, DF und GH die geometrischen Tangenten der Punkte D und E, welche die Axe unter dem Winkel α und α' schneiden; ferner sei $DC = CE = \varrho$ und $\angle DCE = \delta$, vorausgesetzt, daß alle Winkel in Bogenmaße für den Halbmesser $= 1$ gegeben sind. Setzt man die Länge von $DE = s$, so ist $s = \varrho\delta$, oder, weil $\delta = \alpha - \alpha'$ sein muß, $s = \varrho(\alpha - \alpha')$, hieraus $\varrho = \frac{s}{\alpha - \alpha'}$. Für diesen Ausdruck kann man aber, je nachdem die Curve sich wendet, allgemein setzen $\varrho = \pm\frac{s}{\alpha - \alpha'}$.

Diesen beiden Gleichungen ist eine nähere Betrachtung zu widmen.

Was zuerst (3) anlangt, so ist der in der Parenthese enthaltene Ausdruck ein rein analytischer, nämlich die Summe der Produkte aus den Flächenelementen des ganzen betrachteten Querschnittes multiplicirt mit den Quadraten ihrer respectiven normalen Abständen von der neutralen Axe $U_1 U_2$, eine Summe, die folglich allein von der Gestalt des Querschnittes bedingt wird, während E von der physischen Beschaffenheit und ϱ von der Größe der Biegung des Körpers abhängt.

Gedachte Produktensumme bezeichnen wir mit T und nennen sie, lediglich um ihr einen Namen zu geben, das Trägheitsmoment *).

Statt (3) schreiben wir daher

$$\text{I.}\quad Qx = \frac{E}{\varrho} . T.$$

Das Produkt $E . T$ insbesondere wird das Elasticitätsmoment genannt. Wir bezeichnen dasselbe mit W und schreiben überhaupt

$$\text{II.}\quad Qx . \varrho = E . T = W.$$

Hieraus ergiebt sich zugleich folgender Satz:

Für jeden normalen Querschnitt eines gebogenen Körpers ist das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser der neutralen Faserschicht in das statische Moment der biegenden Kraft für diesen Querschnitt eine constante Größe.

Denkt man sich jetzt den Körper mit der Fläche JK in der Wand befestiget, so lassen sich ferner aus II. folgende Schlüsse bilden:

An der Befestigungsstelle wird, wegen $\varrho = \frac{W}{Qx}$, die neutrale Schicht und somit der ganze Körper am stärksten gebogen; an denselben Stellen widerstehen, wegen $Q = \frac{W}{\varrho x}$, die Fasern der Formänderung und Zerstörungen am wenigsten und es kann somit W als das Widerstandsmoment für den ganzen Körper betrachtet werden.

Später, bei näherer Untersuchung der absoluten Größen der erzeugten Biegungen etc., kommen wir auf diese wichtigen Sätze zurück.

---

*) In der Dynamik wird sich ergeben, weshalb wir hier diese Benennung gewählt haben.

Was nun den zweiten der allgemeinen Ausdrücke, nämlich (4) anlangt, so bestimmt dieser die Lage der neutralen Faserschicht.

Denn bezeichnet F den Inhalt der Querschnittsfläche JK und z die Entfernung ihres Schwerpunktes von der neutralen Faserschicht, so erhielt man nach §. 19:

$$F.z = \left\{ \Sigma(iv) - \Sigma(iu) \right\}, \text{ daher aus (4)}$$

$$Q \cos\varphi = \frac{E}{\varrho} . F.z \text{ und somit}$$

$$\text{III.}\quad z = \frac{\varrho\, Q \cos\varphi}{E.F},$$

wo z je nach dem relativen Zeichen von $\cos\varphi$ den Abstand des Schwerpunktes der Fläche über oder unter der neutralen Faserschicht angiebt.

Für $\varphi = 90^{0}$, d. h. wenn Q normal gegen die Axenrichtung des Körpers wirkt, folgt aus III:

$z =$ Null, d. h.

es geht sodann die neutrale Faserschicht durch den Schwerpunkt des betrachteten Körperquerschnittes.

Zusatz. In Betreff des letzteren Satzes machen wir wiederholt auf die Voraussetzungen aufmerksam, unter welchen derselbe entwickelt wurde, daher er auch nur so lange gültig sein kann, als diesen wirklich entsprochen wird.

Nach den sorgfältigsten, bis jetzt angestellten Versuchen kann man feststellen, daß die Körperfasern (kleinsten Theile) der Ausdehnung und Zusammendrückung nach mit gleicher Größe widerstehen, die neutrale Faserschicht also noch durch den Schwerpunkt der betrachteten Querschnittsfläche geht, so lange die Ausdehnung und respective Zusammendrückung der am weitesten abstehenden Fasern von ihrer ursprünglichen Länge nicht mehr beträgt, als

bei Hölzern: 0,00117 (nach Ardant);
„ Schmiedeeisen: 0,0006 (nach Duleau u. A.);
„ Gußeisen: 0,0003 (nach Fairbairn und Hodgkinson).

Ueber diese Grenzen hinaus ist das wiederholt zu beachten, was bereits §. 105, Zusatz 1, angeführt wurde, d. h. die Fasern des Holzes widerstehen der Ausdehnung mehr als der Zusammendrückung, die kleinsten Theile des Gußeisens zeigen aber gerade ein umgekehrtes Verhalten, d. h. sie widerstehen der Ausdehnung weniger (und zwar bedeutend) als der Zusammendrückung.

Für Körper von nicht symetrischem Querschnitte erwächst hieraus zugleich der wichtige Satz, daß man die breiteste Parthie derselben immer nach der Seite hin richten muß, wo der Widerstand der Fasern oder kleinsten Theile der geringste ist. Weiteres in letzterer Beziehung folgt in späteren Paragraphen.

§. 109.

Bei fortgesetzter Biegung des vorher betrachteten mit einem Ende in einer Wand befestigten Körpers muß begreiflicher Weise endlich ein völliges Zerstören und zwar zuerst der von der neutralen Faserschicht am entferntesten Fasern eintreten, dem die übrigen folgen, so daß endlich ein Abbrechen des ganzen Körpers und zwar an der Befestigungsstelle veranlaßt wird.

Für die Größe dieses Bruchwiderstandes läßt sich auf nachstehende Weise ein allgemeiner Ausdruck finden.

Bezeichnet g den Abstand der von der neutralen Schicht am entferntesten Faser und i den Querschnitt der letztern, so ist der Widerstand im Augenblicke des Zerreißens, nach IV. §. 105: $p.i.$ Die Widerstände, welche die übrigen Fasern zeigen, müssen sich aber wie deren respectiven Abstände von der neutralen Schicht verhalten, so daß man für eine in der Entfernung u liegende Faser die Proportion erhält: $g:u = p.i:\frac{pi}{g}.u$, so wie für das Moment derselben in Bezug auf die neutrale Schicht:

$$\frac{p}{g}.i.u^2.$$

Hiernach wird man für das Bruchmoment des ganzen Körpers setzen können

$$\frac{p}{g}\left\{\Sigma(iu^2)+\Sigma(iv^2)\right\}=\frac{p}{g}.T,$$ so wie auch, wenn Q das am freien Ende des Körpers aufgehangenes Gewicht bezeichnet, welches den Bruch veranlaßt, endlich x der Hebelarm desselben in Bezug auf die neutrale Axe der Befestigungsfläche ist:

$$Qx=\frac{p}{g}.T.$$

Für so geringe Biegungen wie wir überhaupt voraussetzten, kann die Länge $= l$ des ganzen Körpers statt x gesetzt werden, weshalb sodann folgt:

$$\text{I.}\quad Q.l=\frac{p}{g}.T;$$

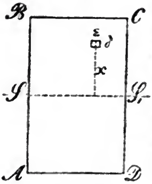
$$\text{II.}\quad Q=\frac{p}{g}.\frac{T}{l}.$$

Hierbei ist Q offenbar als das Maß der respectiven Festigkeit zu betrachten.

§. 110.

Wir bestimmen zunächst die Bruchfestigkeit prismatischer Körper mit rectangulären Querschnitten, wobei Höhe und Breite der letzteren respective vertikal und horizontal sind.

Fig. 81.



Hierzu sei $ABCD$ Fig. 81. ein senkrechter Querschnitt des betreffenden Prismas, seine Breite $AD=BC=b$ und seine Höhe $AB=CD=h$. Ein Element der Fläche, dessen Höhen- und Breitendimensionen δ und ε sein mögen, befinde sich in der normalen Entfernung $=x$ von der neutralen Axe SS'. Der Inhalt dieses Elementes kann $=\varepsilon.\delta$ gesetzt werden, so daß das Trägheitsmoment desselben $=\varepsilon.\delta.x^2$ ist.

Die Summe der Momente, aller in der Vertikalhöhe x liegenden gleichen Elemente, wird man aber erhalten, wenn man in den letzteren Ausdruck für x auf einander folgend δ, 2δ, 3δ ... $n\delta$ setzt und die so erhaltenen Werthe addirt. Es ist also

$$\Sigma(\varepsilon\delta.x^2)=\varepsilon\delta\,\Sigma(x^2)=\varepsilon.\delta^3(1+2^2+3^2\ldots n^2),$$ d. i

nach bekanntem Satze

$$\Sigma(\varepsilon\delta.x^2)=\varepsilon\frac{(n\delta)^3}{3}=\frac{\varepsilon}{3}x^3,$$

für die Höhe $\frac{h}{2}$ erhält man sonach

$$\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3.$$

Denkt man sich jetzt n' solcher Elemente in der Breite b neben einander liegen (wonach $b=\varepsilon n'$), so folgt für diese aus letzterem Ausdrucke $\frac{\varepsilon n'}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3$, oder

$$(1)\quad \frac{b}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3=\frac{bh^3}{24}.$$

Wegen der symetrischen Gestalt des Querschnittes ergiebt sich vorstehendes Endresultat auch für die Elemente unterhalb der neutralen Axe, so daß T überhaupt ist:

$$(2)\quad T=\frac{bh^3}{12}.$$

Aus II. des vorigen §. folgt daher

$$Q=\frac{p}{g}.\frac{bh^3}{12l},$$ oder weil $g=\frac{h}{2}$ sein muß

$$\text{I.}\quad Q=\frac{p}{6}.\frac{bh^2}{l}.$$

Die respectiven Festigkeiten parallelepipedischer Körper aus einerlei Materie, deren Seiten bezüglich horizontal und vertikal liegen, verhalten sich sonach, wie die Breiten, wie die Quadrate

der Höhen und umgekehrt wie die Längen derselben.

Mit Beachtung des eigenen Gewichtes $= G$ des Parallelepipedum erhält man zuerst die Momentengleichung

$$lQ + \tfrac{1}{2}\, lG = \tfrac{1}{6}\, pbh^2, \text{ sodann}$$

$$\text{II. } Q = \tfrac{1}{6}\, p\, \frac{bh^2}{l} - \tfrac{1}{2}\, G.$$

Zusatz. Für die im vorigen §. durch absolute Zahlenwerthe vollständig bezeichneten Grenzen ergeben sich die Werthe des Coefficienten p nach der Tabelle §. 106. wie folgt:

Für Hölzer: $p = 1{,}521$, für Schmiedeisen: $p = 12$ und für Gußeisen: $p = 3{,}3$.

Um hiernach das größte zulässige Gewicht $= Q$ zu finden, womit man parallelepipedische Körper der fraglichen Art mit völliger Sicherheit belasten kann, wird es genügen für Hölzer den dritten Theil, für Schmiedeeisen die Hälfte vorstehender Werthe der Coefficienten p in Rechnung zu bringen, so daß man aus I. erhält:

$$Q = \frac{0{,}507}{6} \cdot \frac{bh^2}{l} = 0{,}0845\, \frac{bh^2}{l}, \text{ für Hölzer;}$$

$$Q = \frac{6}{6} \cdot \frac{bh^2}{l} = \frac{bh^2}{l}, \text{ für Schmiedeeisen und}$$

$$Q = \frac{3{,}3}{6} \cdot \frac{bh^2}{l} = 0{,}55\, \frac{bh^2}{l}, \text{ für Gußeisen *).}$$

Beispiel. An einem schmiedeeisernen Stabe, der mit einem Ende in einer Wand befestigt ist, will man am freien Ende eine Last von 450 Kilogr. aufhängen; es fragt sich, wie man den Querschnitt dieses Stabes zu nehmen hat, wenn seine Länge von der Wand aus gemessen $0^m{,}861$ beträgt und derselbe halb so breit als hoch gemacht werden soll?

Auflösung. Man erhält hier unmittelbar (nach vorstehendem Zusatze), wegen $b = \frac{1}{2}\, h$,

$$h^3 = 2\, Ql = 2 \,.\, 450 \,.\, 861 \text{ und}$$

$h = 91{,}95$ Millimeter, wofür man $h = 92$ Millimeter und sonach $b = 46$ Millimeter nehmen kann **).

§. 111.

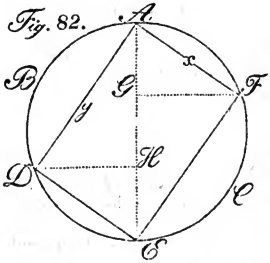
Wir lassen hier noch drei für technische Anwendungen besonders wichtige Aufgaben folgen.

Aufgabe 1. Es soll angegeben werden, wie man den Querschnitt eines vierkantigen Balkens zu nehmen hat, der, aus einem kreisrunden Baumstamme gehauen, die größtmöglichste respective Festigkeit zeigt.

*) Daß hierbei b, h und l gleichzeitig in Millimetern auszudrücken sind, bedarf wohl kaum besonders erwähnt zu werden.

**) Wie dieses Beispiel zu behandeln ist, wenn der Stab in allen Querschnitten gleichen Widerstand leisten, oder wenn derselbe sich nicht biegen soll, wird aus später folgenden Paragraphen leicht zu entnehmen sein.

Fig. 82.



Es sei *ABC* Fig. 82. der Querschnitt des Stammes, $AE = D$ dessen Durchmesser, ferner y die zu findende Höhe, so wie x eben so die Breite des zu hauenden Balkens.

Da die Länge des Balkens in jedem Falle dieselbe bleibt, so wird blos zu untersuchen sein, unter welcher Bedingung das Produkt xy^2, welches $= z$ gesetzt werden mag, ein Maximum wird.

Damit nur eine veränderliche Größe in Betracht kommt, bemerke man, daß nach der Figur $y^2 = D^2 - x^2$ ist, also

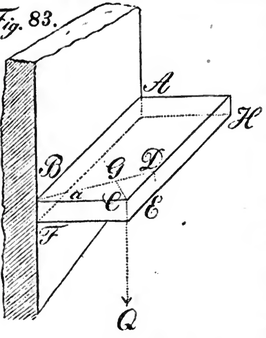
$$z = D^2 x - x^3 \text{ folgt.}$$

Dieser Ausdruck wird aber ein Maximum *) für $x = \frac{D}{\sqrt{3}}$, woraus sich $y = D\sqrt{\frac{2}{3}}$ ergiebt.

Theilt man daher den Durchmesser *AE* in drei gleiche Theile, errichtet in den Theilpunkten *G* und *H* Perpendikel *GF* und *DH*, zieht ferner die Verbindungslinien *AF* und *DE*, so wie *AD* und *FE*, so ist das entstandene Rectangel das gesuchte, indem sich zufolge dieser Construction die Werthe von x und y, wie vorstehend, finden lassen.

Aufgabe 2. Eine rechtwinklige Platte, deren Material von ganz gleichem Gefüge sein mag, ist mit ihrer längeren Kante *AF* horizontal eingemauert und an eine Ecke derselben bei *E* ein Gewicht *Q* aufgehangen; man soll die Lage der Linie *BD*, nach welcher bei fortwährender Vergrößerung von *Q* die Platte endlich abbrechen wird, so wie auch die Größe von *Q* für den bemerkten Fall angeben.

Fig. 83.



Setzt man die durchaus gleiche Höhe der Platte $BF = h$, so erhält man unmittelbar aus I. §. 110:

*) Die Lehre vom Maximum und Minimum veränderlicher Größen findet man, ohne Anwendung der Differenzialrechnung, behandelt in nachbenannten Werken, worauf hier erwiesen werden muß.
Kaiser's bereits Seite 100 citirte Statik.
Brix. Elementarlehrbuch der Statik fester Körper. Berlin 1831.
Schaffer. Geometrische Aufgaben. Oldenburg 1816.

$$Q = \frac{1}{6} p \frac{\overline{BD}.h^2}{\overline{GC}}.$$

Wird sodann ferner der unbekannte Winkel DBC, welchen die Linie BD mit der Kante BC bildet, mit α bezeichnet, so ist $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{\cos\alpha}$, oder, wenn $tg\alpha = x$ gesetzt wird,

$$\overline{BD} = \overline{BC}\sqrt{1 + x^2};$$

ferner $\overline{GC} = \overline{BC} \sin\alpha = \overline{BC} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Führt man diese Ausdrücke in den Werth für Q ein, so folgt

$$Q = \frac{1}{6} p \,.\, \frac{1 + x^2}{x} h^2.$$

Der Aufgabe zu Folge wird aber jetzt zu untersuchen sein, für welchen Werth von x, der Factor $\frac{1 + x^2}{x}$ ein Minimum wird. Nimmt man diese Untersuchung vor, so findet sich, daß dies für $x = 1$ stattfindet, wornach also ist $tg\alpha = 1$, $\alpha = 45^0$ und

$$Q = \frac{1}{3} p \,.\, h^2.$$

Aufgabe 3. Es ist eine Formel für die Stärke der Zähne eines gußeisernen Stirnrades zu finden, welche einen Druck von Q Kil. mit Sicherheit auszuhalten vermögen.

Auflösung. Mit Rücksicht auf einen möglichen irregulären Eingriff der Zähne und sonstige Zufälle werde angenommen, daß der ganze Druck Q, wenigstens momentan, nur an einem Ende eines betreffenden Zahnes wirke, weshalb man, nach voriger Aufgabe setzen kann, wenn h die Zahndicke (im Theilrisse gemessen) bezeichnet:

$$Q = \frac{1}{3} p \,.\, h^2.$$

Wegen Abrundung der Zähne und möglicher Abnutzung derselben, wollen wir eine um $\frac{1}{10}$ verminderte Zahndicke einführen, so daß man erhält, weil außerdem nach §. 106: $p = 3{,}3$ ist

$$Q = \frac{3{,}3}{3} \,.\, \left(\frac{9}{10} h\right)^2 = \frac{267{,}3}{300} \,.\, h^2,$$ woraus sich ergiebt:

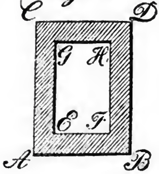
$$h = 1{,}06 \sqrt{Q} \text{ Millimeter.}$$

§. 112.

Hat man die respective Festigkeit parallelepipedischer Körper zu bestimmen, deren Querschnitte als aus Rechtecken zusammengesetzt angenommen werden können und die von der neutralen Schicht in zwei völlig symmetrische Theile getheilt werden,

so sind die betreffenden allgemeinen Ausdrücke zwar leicht, aber nicht unmittelbar aus I. §. 110. abzuleiten, vielmehr muß man hierzu die Gleichung II. §. 109. wählen und daselbst T und g den speciellen Fällen entsprechend bestimmen. Nachstehende Beispiele werden zur geeigneten Erläuterung dienen.

Fig. 84.



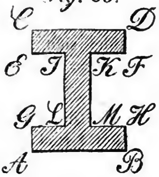
Beispiel 1. Der Querschnitt besteht aus der Differenz zweier Rechtecke AD und EH Fig. 84. Für diesen Fall erhält man, wenn $AC = DB = h$, $AB = CD = b$, $EG = FH = h'$, $EF = GH = b'$ gesetzt wird, wie leicht einzusehen:

$$T = \frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3);$$

sodann aber mittels II, weil $g = \frac{1}{2}h$ sein muß,

$$Q = \tfrac{1}{6}p\,\frac{(bh^3 - b'h'^3)}{hl}.$$

Fig. 85.



Beispiel 2. Der Querschnitt hat die Form von Fig. 85.

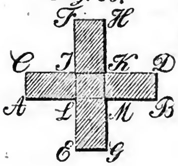
Setzt man hier $AC = DB = h$, $AB = CD = b$, $IL = KM = h'$, $EI = KF = GL = HM = b'$, so folgt

$$T = \frac{1}{12}(bh^3 - 2b'h'^3);$$

ferner, wegen $g = \frac{1}{2}h$,

$$Q = \tfrac{1}{6}p\,\frac{bh^3 - 2b'h'^3}{hl}.$$

Fig. 86.



Beispiel 3. Der Körper hat einen kreuzförmigen Querschnitt wie Fig. 86.

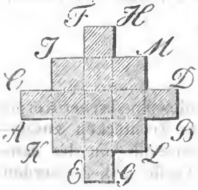
Ist $AB = CD = EF = HG = h$, $AC = DB = ES = FH = b$, so folgt

$$T = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3 - b^4);$$

sodann aber, weil wie vorher $g = \frac{1}{2}h$,

$$Q = \tfrac{1}{6}p \cdot \frac{b}{hl} \cdot (h^3 + hb^2 - b^3).$$

Fig. 87.



Beispiel 4. Der Querschnitt des Körpers hat die Gestalt von Fig. 87.

Ist $AB = CD = FE = HG = h$, $IM = KL = IK = ML = b$, $AC = DB = EG = FH = d$, so erhält man

$$T = \frac{1}{12}(h^3 d + d^3 h + b^4 - b^3 d - bd^3);$$

$$T = \frac{1}{12}\left\{b^4 + d(h^3 - b^3) + d^3(h - b)\right\}.$$

Ferner

$$Q = \tfrac{1}{6}p \cdot \left\{\frac{b^4 + d(h^3 - b^3) + d^3(h - b)}{hl}\right\}.$$

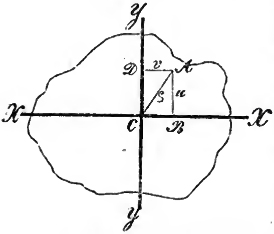
§. 113.

Wir betrachten nunmehr die respective Festigkeit prismatischer Körper mit nicht rectangulären Querschnitten, so wie auch von solchen der letzteren Art, wobei die Seiten nicht respective vertikal und horizontal liegen.

Begreiflicher Weise kommt auch hier alles auf die entsprechende specielle Bestimmung der Größe T an. Um dies aber unter allen Umständen eben so leicht als schnell bewerkstelligen zu können, wird es nöthig zwei Hülfssätze abzuleiten.

Erster Hülfssatz. Die Summe der Trägheitsmomente derselben Fläche bezogen auf zwei Axen, die sich in der Ebene der ersteren rechtwinklig schneiden, ist gleich dem Trägheitsmomente derselben Fläche bezogen auf eine Axe, die im Durchschnittspunkte der ersten beiden Axen normal auf der Ebene steht.

Fig. 88.



Es sei i ein bei A Fig. 88. in der Fläche liegendes Element, dessen Entfernung vom Durchschnittspunkte C der beiden sich rechtwinklig schneidenden Axen XX, YY, nämlich $AC = \varrho$ sein mag. In C denke man sich eine auf der Fläche normale Axe CZ.

Zieht man von A respective auf XX und YY Normalen $AB = u$, $AD = v$, so ist

$i \cdot u^2$ das Trägheitsm. des Elementes bezogen auf XX;
$i \cdot v^2$ » » » » » » YY;
$i \cdot \varrho^2$ » » » » » » CZ.

Nach geometrischen Sätzen ist aber $\varrho^2 = u^2 + v^2$, daher auch $i\varrho^2 = iu^2 + iv^2$, ein Satz, der sich begreiflicher Weise für alle Elemente der Fläche nachweisen läßt.

Man kann sonach für die ganze Fläche setzen, wobei der Sinn des Zeichens Σ von selbst einleuchtet,

$$\text{I.}\quad \Sigma(m\varrho^2) = \Sigma(mu^2) + \Sigma(mv^2).$$

Theilen die Axen XX und YY die Fläche in vier symetrische Theile, so erhält man insbesondere

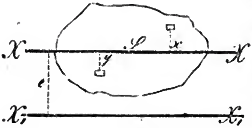
$$\text{II.}\quad \Sigma(m\varrho^2) = 2\Sigma(mu^2) = 2\Sigma(mv^2).$$

Zweiter Hülfssatz. Das Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf eine beliebige in der Ebene derselben liegende Axe, ist gleich dem Trägheitsmomente derselben Fläche in Bezug auf eine zur

ersteren parallelen Axe, die durch den Schwerpunkt der Fläche geht (auch in ihrer Ebene liegt), letzteres Moment vermehrt um das Produkt aus dem Inhalte der Flache in den Abstand der beiden gedachten Axen.

Es sei T das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerpunktsaxe XX 'Fig. 89, T'_1 das in Bezug auf die zur ersteren parallelen, in der Entfernung $= e$ gezogenen Axe XX'.

Fig. 89.



Denkt man sich wieder die ganze Fläche in ihre Elemente von der Größe i zerlegt und bezeichnet die normalen Abstände dieser Elemente über der Axe XX mit $x_1, x_2 \ldots x_n$, unterhalb derselben mit $y_1, y_2 \ldots y_n$, so ist offenbar:

$$(1) \quad T = \Sigma\,(ix^2) + \Sigma\,(iy^2).$$

Auf analoge Weise findet man ferner

$$T' = \left\{ \begin{matrix} i(e+x_1)^2 + i(e+x_2)^2 \ldots + i(e+x_n)^2 \\ + i(e-y_1)_2 + i(e-y_2)^2 \ldots + i(c+y_n)^2 \end{matrix} \right\}.$$

$$T' = e^2\,\Sigma\,(i) + \Sigma\,(ix^2) + \Sigma\,(iy^2) + 2e\,(ix_1 + ix_2 \ldots\ldots + ix_n - iy_1 - iy_2 \ldots\ldots - iy_n).$$

Die Summe der zu beiden Seiten der Schwerpunktsaxe XX liegenden statischen Momente muß aber gleich Null sein, weshalb man erhält, wenn man T aus (1) in letztere Gleichung einführt und $\Sigma i = F$ setzt

$$\text{III.} \quad T' = T + e^2 F.$$

Sehr oft braucht man diese Gleichung auch unter der Form

$$\text{IV.} \quad T = T' - e^2 F.$$

§. 114.

Respective Festigkeit von Körpern mit kreis- oder halbkreisförmigen Querschnitten.

Für kreisförmige Querschnitte kann (auf elementarem Wege) die direkte Ableitung von T nicht ohne höchst weitläufige Rechnungen geschehen, weshalb wir besser von dem Satze unter II. des vorigen §. Gebrauch machen und zuerst $\Sigma\,(m\varrho^2)$ bestimmen.

Zu diesem Ende denken wir uns die Kreisfläche ganz so wie bereits §. 72. geschah, in concentrische Elemente von der Breite $= \delta$ zerlegt, so daß man für den Inhalt eines solchen in der Entfernung $= x$ vom Mittelpunkte liegenden Elementes erhält: $2\,\delta\,\pi\,.\,x$ und sonach, wenn mit x^2 multiplicirt wird für die Fläche vom Halbmesser x:

$$\Sigma\,(m\varrho^2) = \Sigma\,(2\,\delta\,\pi\,.\,x^3) = 2\,\delta\,\pi\,\Sigma\,(x^3).$$

Hieraus findet sich aber auf die jetzt hinlänglich bekannte

Weise verfahren: $\Sigma(m\varrho^2) = \frac{1}{2}\pi x^4$, odes für die ganze Kreisfläche von dem Halbmesser $= r$

$$(1)\quad \Sigma(m\varrho^2) = \tfrac{1}{2}\pi r^4\,{}^{*}).$$

Daher nach II. des vorigen §. das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe des Kreisquerschnittes:

$$2\,T = \tfrac{1}{2}\pi r^4,$$

$$(2)\quad T = \tfrac{1}{4}\pi r^4.$$

Diesen Werth in II. des §. 109. gesetzt und beachtet, daß hier zugleich $g = r$ sein muß, erhält man

$$\text{I.}\quad Q = \tfrac{1}{4}\,p\,\frac{r^3\pi}{l}.$$

Zusatz 1. Für einen concentrisch ausgehöhlten Cylinder erhält man, wenn die innern und äußeren Halbmesser bezüglich mit R und r_1 bezeichnet werden

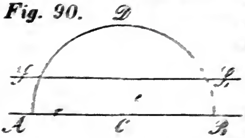
$$T = \tfrac{1}{4}\pi(R^4 - r_1^4),\ \text{daher weil hier } g = R \text{ ist,}$$

$$\text{II.}\quad Q = \tfrac{1}{4}\pi\,\frac{R^4 - r_1^4}{R\,.\,l}.$$

Vergleicht man die Festigkeit eines hohlen Cylinders mit der eines massiven von gleichem Materiale, für die Voraussetzung, daß beide gleiches Volumen besitzen, so ergiebt sich der Vortheil, den hohle Cylinder hinsichtlich ihrer respectiven Festigkeit gegen massive darbieten.

Zusatz 2. Für Körper mit halbkreisförmigem Querschnitte ADB Fig. 90. erhält man zuerst in Bezug auf den horizontalen Durchmesser AB, unmittelbar nach (2.)

Fig. 90.



$$T_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi r^4.$$

Um hieraus das Moment $= T$ auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe SS' zu bestimmen, benutze man die Gleichung IV. §. 112, woselbst $e = \frac{4r}{3\pi}$ nach §. 49, ferner $F = \frac{r^2\pi}{2}$ zu setzen ist. Sodann folgt

$$T = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}\,.\,r^4 = 0{,}11\,.\,r^4\,{}^{**}).$$

Daher aus II. §. 109, wegen $g = r - e = \frac{r(3\pi - 4)}{3\pi} = 0{,}57\,.\,r$

$$Q = [illegible]\ p\,.\,\frac{r^3}{l},\ \text{oder genau genug}$$

$$\text{III.}\quad Q = 0{,}2\,.\,p\,\frac{r^3}{l}$$

---

*) [illegible] Anwendung wird dieser Ausdruck später bei der [illegible] finden.

**) Dieser Werth für T wird auch für den Fall erhalten, daß der [illegible] Durchmesser AB nach [illegible] ist.

Die Festigkeit des ganzen Cylinders mit der des Halbcylinders unter sonst gleichen Umständen verglichen, steht folglich in dem Verhältnisse von $\frac{\pi}{4} : 0{,}2$ d. i. $0{,}7854 : 0{,}2$, d. i. ziemlich genau: $1 : \frac{1}{4}$. Da beim Halbcylinder gegen den ganzen Cylinder nur die Hälfte an Material erspart wird, so folgt hieraus von selbst, daß die Anwendung von Körpern mit halbcylindrischen Querschnitten nichts weniger als vortheilhaft ist.

Zusatz 2. Vergleicht man die Festigkeit eines ganzen Cylinders mit der Q_1 eines Parallelepipedum von gleicher Länge und demselben Materiale, dessen Querschnitt ein um die normale Kreisfläche des Cylinders beschriebenes Quadrat von der Seitenlänge $= a$ ist, so erhält man

$$Q : Q_1 = \frac{\pi}{4} : \tfrac{3}{4} = 3\pi : 16, \text{ also, wenn } \pi = \frac{22}{7} \text{ gesetzt wird}$$

$$Q_1 = \tfrac{33}{56} \cdot Q.$$

Zusatz 3. Wir sind nunmehr auch in den Stand gesetzt, die in §. 103. behandelte Frage, um wie viel die absolute Festigkeit eines Cylinders geringer ist, wenn die reißende Kraft im Mantel desselben wirkt, zu beantworten.

Bringt man das dort erhaltene Paar, dessen Moment $= Qr$ war, auf die Breite $= l$, wobei l die Länge des Cylinders bezeichnet, so erhält man $\frac{Qr}{l}$ als eine Kraft, welche den Körper an der Befestigungsfläche abzubrechen sich bestrebt. Fürs Gleichgewicht erhält man daher aus I. dieses §.

$$\frac{Qr}{l} = \frac{p}{4}\,\frac{\pi r^3}{l}, \text{ d. i. } Q = \frac{p}{4} \cdot \pi r^2,$$

um diesen Werth muß aber die absolute Festigkeit verringert werden, d. h. es ist statt IV. §. 105. zu setzen

$$Q - \frac{p}{4}\pi r^2 = p\pi r^2, \text{ woraus}$$

$$Q = \tfrac{3}{4}\, pr^2\pi \text{ folgt.}$$

Es wird folglich für diesen speziellen Fall die absolute Festigkeit um $\frac{1}{4}$ vermindert *).

Bei Körpern von vorzüglicher Faserstructur (wie bei Hölzern) dürfte letzterer Werth noch geringer sein, weil sodann die weniger widerstehende Parallelcohäsion in Betracht gezogen werden muß.

---

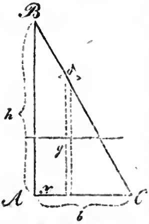
*) Für ein Parallelepipedum, dessen Querschnittsdimension b und h sind, und wobei die reißende Kraft in der Fläche $b.l$ von der Axe um $\frac{1}{2}h$ entfernt wirkt, erhält man auf ähnliche Weise, die absolute Festigkeit zu:

$$Q = \tfrac{2}{3}\, p \,.\, bh, \text{ statt } p \,.\, bh, \text{ wenn } Q \text{ in der Axe des Körpers wirkt.}$$

§. 115.

Körper, wobei die Querschnitte Dreiecke oder Figuren bilden, die sich aus Dreiecken zusammensetzen lassen.

Fig. 91.



Bildet der Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ABC Fig. 91, dessen Höhe AB und Grundseite AC respective h und b sind, und wobei AC horizontal liegt, so finde man zuerst T_1 bezogen auf AC wie folgt.

Man denke sich die ganze Fläche durch Parallellinien zu AB, in der gegenseitigen Entfernung $= \delta$ gezogen, in Elemente zerlegt, so erhält man für das Trägheitsmoment eines derselben von der Höhe $= y$ (als Rectangel betrachtet) in Bezug auf AC: $\frac{1}{3}\delta y^3$. Steht y um die horizontale Entfernung $= x$ von AB ab, so findet statt: $y : x = h : b$, d. i. $y = \frac{h}{b} . x$. Daher für letzterem Ausdrucke auch zu setzen ist $\frac{1}{3}\frac{h^3}{b^3} . \delta . \Sigma (x)^3$, fürs ganze Dreieck folglich $\frac{1}{3}\frac{h^3}{b^3}\delta . \Sigma (x^3)$. Hieraus aber nach bekanntem Verfahren, wenn zuletzt b statt x gesetzt wird:

$$(1)\quad T_1 = \tfrac{1}{12} bh^3.$$

Für das Moment T in Bezug auf die neutrale Axe des Querschnittes ergiebt sich daher nach IV. §. 113, weil hier $e = \frac{1}{3}h$, $F = \frac{bh}{2}$ ist.

$$T = \tfrac{1}{36} bh^3.$$

Letzterer Werth findet sich auch für den Fall, daß die horizontale Grundseite AC nach oben gekehrt ist.

Sonach endlich aus II. §. 109, wegen $g = \frac{2}{3}h$

$$\text{I. } Q = \tfrac{1}{24} p . \frac{bh^2}{l}.$$

Letzteren Werth erhält man auch, unter sonst gleichen Umständen, für jedes beliebige Dreieck, dessen Grundseite und Höhe respective b und h sind.

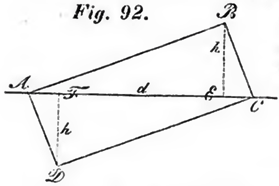
Aehnlich wie beim Halbcylinder läßt sich auch hier zeigen, daß Körper von dreieckigen Querschnitten gegenüber solchen von rectangulären Querschnitten, unter sonst gleichen Umständen, für die Anwendung nicht vortheilhaft sind *).

---

*) Anders würde sich natürlich die Sache gestalten, wenn man die Rechnungen für Belastungen anstellt, welche die früher bezeichneten Grenzen übertreffen,

Zusatz 1. Bildet der Querschnitt des Körpers ein Rechteck mit horizontaler Diagonale $AC = d$ Fig. 92. und der Höhe $BE = DF = h$, so erhält man $T = \frac{1}{18} dh^3$, d. i. wegen $g = \frac{1}{3} h$

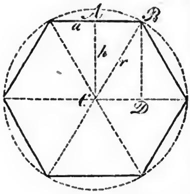
Fig. 92.



$$Q = \frac{1}{6} p \frac{dh^2}{l}.$$

Zusatz 2. Bildet der Querschnitt des Körpers ein reguläres Polygon, z. B. ein reguläres Sechseck Fig. 93, so leitet man zuerst das erforderliche T am einfachsten wie nachstehend ab. Man zerlege das Polygon (wie die Figur zeigt) in Dreiecke, ziehe die Normalen AC und BD, setze $AC = h$, $AB = a$ und den Radius des umschriebenen Kreises $= r$.

Fig. 93.



Das Moment der Fläche $ABCD$ ist sodann in Bezug auf CD nach §. 110: $\frac{1}{3} ah^3$, das des Dreiecks CBD nach (1) dieses §.: $\frac{1}{12} ah^3$, folgl.: das Moment des Dreiecks ACB: $\frac{1}{3} ah^3 - \frac{1}{12} ah^3 = \frac{1}{4} ah^3$.

In Bezug auf eine in C normal gedachte Axe erhält man ferner für das letztere Dreieck nach I. §. 113:

$$\Sigma (m\varrho^2) = \frac{1}{4} ah^3 + \frac{1}{12} a^3 h = \frac{1}{12} ah (3a^2 + h^2).$$

Letzteren Werth 12 mal genommen giebt das Moment des Polygones: $ah (3a^2 + h)$, oder wegen $a = \frac{1}{2} r$, $h = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$ auch

$$(1) \quad \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} r^2 + \frac{1}{4} r^2\right) = \frac{5}{8} r^4 . \sqrt{3}.$$

Daher sodann, zufolge II. §. 113, T bezogen auf die neutrale Axe des Querschnittes:

$$T = \frac{5}{16} r^4 . \sqrt{3}, \text{ so wie endlich, wegen } g = h = \frac{1}{2} r \sqrt{3}:$$

$$Q = \frac{5}{8} p \frac{r^3}{l}.$$

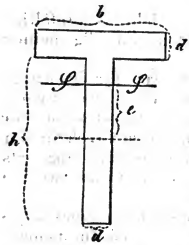
---

d. h. wo die Kraft zum Ausdehnen der Fasern nicht mehr gleich der zum Zusammendrücken angenommen werden darf. Sind solche Belastungen noch zulässig, so würde es für Hölzer am vortheilhaftesten sein, die Dreieckspitze nach oben, für solche aus gegossenen Metallen aber nach unten zu kehren.

§. 116.

Körper, wobei die Querschnitte eine nicht symmetrische aus Rectangeln zusammengesetzte Gestalt besitzen.

Fig. 94.



Von den hierhergehörigen mannigfachen Formen, wie sie bei technischen Constructionen vorkommen, wird es für gegenwärtigen Zweck hinreichen einen Fall zu behandeln, wozu wir den wählen, daß die Querschnittsform des Körpers ein lateinisches T Fig. 94. bildet.

Für die in unserer Figur beigeschriebenen Dimensionen erhält man zuerst

Trägheitsmoment des Kopfes (der Platte) bezogen auf die Axe durch den Schwerpunkt desselben:

$$\tfrac{1}{12} \cdot bd^3.$$

Dasselbe Moment für den Fuß (die Rippe):

$$\tfrac{1}{12}\, dh^3.$$

Beide Momente sind nun auf die durch den Schwerpunkt der ganzen Querschnittsfläche gehende Axe SS zu reduciren. Setzt man deshalb die noch unbekannte Entfernung der letzteren vom Schwerpunkte des Fußes $= x$, so folgt unmittelbar aus III. §. 113:

Das reduz. Moment der Platte: $\dfrac{bd^3}{12} + (\dfrac{d+h}{2} - x)^2\, bd;$

» » » » Rippe: $\dfrac{dh^3}{12} + x^2 . dh.$

Das erforderliche Trägheitsmoment $= T$ ist sonach:

$$T = \frac{d}{12}(bd^2 + h^3) + (\frac{d+h}{2} - x)^2\, bd + x^2 . dh.$$

Die Bestimmung der Größe x geschieht sehr einfach mittels der statischen Momentengleichung $bd\,\dfrac{h+d}{2} + dh \times \text{Null} = x\,(bd + dh)$, woraus man erhält:

$$x = \frac{b\,(d+h)}{2\,(b+h)}.$$

Durch Subst. von T in II. §. 110, wobei ferner $g = \dfrac{h}{2} + x$ zu setzen ist, erhält man endlich Q oder die respect. Fertigkeit des fraglichen Körpers.

Zusatz. Dieselben Werthe für T und Q ergeben sich auch bei umgekehrter Lage des Querschnittes, d. h. wenn der Kopf zwar horizontal, aber nach unten gerichtet ist.

Wichtig dürfte es für praktische Anwendungen sein, in letzterer Beziehung hier noch Folgendes anzuführen.

Ueber die bereits mehrfach erwähnten Gränzen hinaus ändert sich der Satz, daß der fragliche Körper in beiden Lagen einer gegen seine Längenrichtung normalwirkenden Kraft gleichen Widerstand leistet und zwar um so mehr, je näher bemerkte Kraft der kommt, für welche der wirkliche Bruch erfolgt.

Für derartige aus Gußeisen gebildete Körper lehren sorgfältige Versuche, die Fairbairn und Hodgkinson anstellten, im Allgemeinen Folgendes.

1. Obiger Satz ist schon nicht mehr anwendbar, für Belastungen, die ungefähr $\frac{1}{5}$ derjenigen betragen, wofür der Bruch bewirkt wird.

2. Ein auf zwei horizontale Stützen gelegter gußeiserner in der Mitte belasteter Körper von gedachter Querschnittsform brach in der Lage $\top$ bei einer durchschnittlich viermal kleineren Belastung, als wenn derselbe in der Lage $\perp$ der einwirkenden Kraft unterworfen wurde.

3. Für gußeiserne Balken von der Querschnittsform eines doppelten I wird daher, wenn diese gegen Ausdehnung und Zusammendrückung (wie vorbemerkt aufgelegt und belastet) gleichen Widerstand leisten sollen, der Kopf schmäler (und dünner) sein müssen als der Fuß.

Man erreicht dies, wenn dem Fuße (ungefähr) 6 mal so viel Masse gegeben wird als dem Kopfe *).

§. 117.

Respective Festigkeit von Körpern, welche mit beiden Enden aufliegen oder daselbst befestigt sind.

Bis auf die am Ende des vorigen §. gemachten Bemerkungen dachten wir uns bei den übrigen Betrachtungen den prismatischen Körper oder Balken mit der einen Endfläche befestigt und am freien Ende die brechende Kraft wirkend; untersuchen wir jetzt die Fälle, wo der Balken mit beiden Enden aufliegt oder befestigt ist.

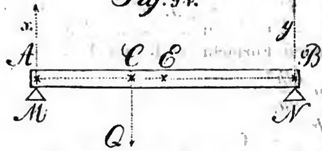
---

*) Es wird nicht ohne Nutzen sein, hier die vorzüglichsten Maße des gußeisernen Balkens anführen, welcher bei dem Versuche zu dem letztgedachten Resultate führte. Es betrug in Millimetern die ganze Höhe des Querschnittes: 103,2; die Breite der rectangulären Kopfes: 59,2, dessen Höhe 7,87; die Breite des Fußes: 169,4, dessen Höhe: 16,91; die Dicke des vertikalen Mittel- oder Verbindungsstückes: 6,67. Der Kopf hatte durchaus gleiche Querschnitte, der Fuß nur überall dieselbe Höhe, während die Breiten nach den Enden hin abnahmen (169,4 in der Mitte) und die Horizontalprojection eine an den Längenseiten von zwei Parabelbogen eingeschlossene Fläche bildete. Bei den Versuchen lag der Balken auf zwei Stützen, welche um die Entfernung 1m,372 von einander abstanden. Das Gewicht des Balkens betrug 32,19 Kil. und der Bruch erfolgte bei einer Belastung in der Mitte von 12026,48 Kil. In Betreff Weiteres über diese interessanten und werthvollen Versuche müssen wir auf folgende Werke verweisen.

Memoirs of Manchester Philosophical Society, vol. IV. p. 453.

Combes a. a. O. Tome I. p. 571.

Fig. 94.



Zunächst denken wir uns den Balken AB Fig. 94. in horizontaler Lage auf feste Stützen M und N gelegt und an einem Punkte C desselben ein Gewicht Q angebracht, welches denselben zu zerbrechen strebt.

Setzt man die Entfernung $AC = a$, $CB = a_1$, behält man aber sonst die frühere Bezeichnung bei, so daß $a + a_1 = l$ ist, so erhält man nach §. 21. für die auf die Punkte A und B kommenden Pressungen

$$x = \frac{a_1}{l} \cdot Q; \; y = \frac{a}{l} \cdot Q.$$

Denkt man sich ferner den Balken in C gehörig unterstützt und nimmt x und y als aufwärts wirkend an, so wird man nach dem Bisherigen setzen können

$$x = \tfrac{1}{6} p \frac{bh^2}{a}; \; y = \tfrac{1}{6} p \frac{bh^2}{a_1}.$$

Vergleicht man die doppelten für x und y gefundenen Werthe mit einander, so erhält man in beiden Fällen

$$\text{I.} \quad Q = \tfrac{1}{6} p \frac{blh^2}{a.a_1};$$

oder, weil $a_1 = l - a$,

$$\text{II.} \quad Q = \tfrac{1}{6} p \frac{blh^2}{a(l-a)}.$$

Setzt man noch, wenn E die Mitte des Balkens ist, $CE = d$, so wird $a = \frac{1}{2} l - d$, $a_1 = \frac{1}{2} l + d$, und

$$\text{III.} \quad Q \tfrac{4}{6} p \cdot \frac{blh^2}{l^2 - 4d^2}.$$

Für $d = o$ ist der Nenner der letzteren Gleichung am größten, so daß der Balken am wenigsten trägt, wenn Q in der Mitte desselben wirkt. Für letzteren Fall wird aus III:

$$\text{IV.} \quad Q = \tfrac{4}{6} p \cdot \frac{bh^2}{l}.$$

In Vergleich mit I. §. 110. erkennt man aber, daß die respective Festigkeit eines mit beiden Enden frei aufliegenden Balkens viermal so groß ist, als wenn derselbe mit einem Ende festgehalten und an dem anderen mit demselben Gewichte belastet wird.

Hat man das Gewicht $= G$ des Balkens zu berücksichtigen, so mögen g und g_1 beziehlich die Gewichte der beiden Hälften

a und a_1 sein. Von A wird sodann $\frac{1}{2}\,g$, von C gleichfalls $\frac{1}{2}\,g$, von B aber $\frac{1}{2}\,g_1$, sowie von C wieder $\frac{1}{2}\,g_1$ getragen, so daß auf C überhaupt $\frac{1}{2}\,(g+g_1)=\frac{1}{2}\,G$ kommt. Man erhält demnach aus einer der vorstehenden Formeln. z. B. aus I:

$$Q+\tfrac{1}{2}\,G=\tfrac{1}{6}\,p\,\frac{blh^2}{aa_1};$$

$$\text{V.}\quad Q=\tfrac{1}{6}\,p\,\frac{blh^2}{aa_1}-\tfrac{1}{2}\,G.$$

§. 118.

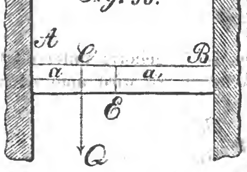


Fig. 95.

Ist der Balken mit beiden Enden hinlänglich fest eingemauert, so kann man annehmen, daß er an den drei Stellen A, B und C zugleich brechen wird, wenn Q eine hinlängliche Größe erreicht.

Bezeichnet man deshalb die Kräfte, welche in den Punkten A, B und C den Bruch erzeugen, mit q, q_1 und q_2, behält man ferner die bisherigen Bezeichnungen bei, so folgt

$$q=\tfrac{1}{6}\,p\,\frac{bh^2}{a};\quad q_1=\tfrac{1}{6}\,p\,\frac{bh^2}{a_1};\quad q_2=\tfrac{1}{6}\,p\,\frac{blh^2}{aa_1}.$$

Es muß aber Q diese drei Brüche zugleich bewirken, daher auch sein

$$Q=\tfrac{1}{6}\,p\,bh^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}+\frac{l}{aa_1}\right);$$

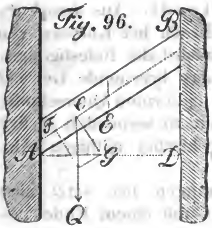
$$\text{I.}\quad Q=\tfrac{2}{6}\,p\,\frac{blh^2}{aa_1};$$ oder, wie in III. des vorigen §.

$$\text{II.}\quad Q=\tfrac{8}{6}\,p\,\frac{blh_2}{l^2-4d^2}.$$

Für $d=o$ wird die brechende Kraft wieder am kleinsten und zwar zu

$$\text{III.}\quad Q=\tfrac{8}{6}\,p\,\frac{bh^2}{l}.$$

Es trägt also der Balken in diesem Falle 8 mal so viel, als wenn er mit einem Ende befestigt ist und am freien Ende das brechende Gewicht wirkt.



Zusatz. Für den Fall, daß der Balken unter einem Winkel $BAD = \alpha$ gegen den Horizont geneigt ist, kann nur die winkelrechte Seitenkraft $CG = Q \cos \alpha$ auf den Bruch wirken, indem die andere Seitenkraft $CF = Q \sin \alpha$ die rückwirkende Festigkeit in Anspruch nimmt; man erhält demnach aus I.

$$Q = \tfrac{1}{3} p \frac{blh^2}{aa_1 \cos \alpha}.$$

§. 119.

Wirkt endlich die brechende Kraft nicht in bestimmten Punkten, sondern ist dieselbe gleichförmig über die ganze Länge vertheilt, so läßt sich der entsprechende Ausdruck für Q, wie nachstehend, finden.

Man denke sich den Balken in zwei gleich lange Hälften zerlegt, so daß jede derselben $\frac{Q}{2}$ zu tragen hat. Da aber in jeder dieser Hälften ebenfalls gleichförmige Vertheilung stattfindet, so wird auf jedes der Enden $\frac{Q}{4}$ als Tragkraft kommen. Die beiden $\frac{Q}{4}$, welche auf die aufliegenden Enden zu rechnen sind, können jedoch zum Zerbrechen nichts beitragen, so daß für die in der Mitte auf den Bruch wirkende Kraft verbleibt $\frac{Q}{4} + \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2}$. Setzt man daher in die früheren Formeln $\frac{Q}{2}$ statt Q, so erhält man Werthe, welche der hier angenommenen Voraussetzung entsprechen. Z. B. aus III. des vorigen §,

$$\frac{Q}{2} = \tfrac{8}{6} p \frac{bh^2}{l};$$

$$Q = \tfrac{16}{6} p \frac{bh^2}{l} \text{ u. s. w.}$$

Der Balken trägt also doppelt so viel, wenn die brechende Kraft gleichmäßig über seine Länge vertheilt ist, als wenn dieselbe in irgend einem Punkte der letzteren angebracht wird.

Körper von gleichem Widerstande.

§. 120.

Von besonderer Wichtigkeit sind sehr oft diejenigen Körper, die in allen ihren Querschnitten einerlei Festigkeit zeigen, oder

die Körper von gleichem Widerstande. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nämlich, daß der Bruch bei Körpern von durchaus gleichen Querschnitten immer zunächst der Befestigungsfläche oder an dem Punkte erfolgt, wo das brechende Gewicht Q angebracht ist; die von diesen Stellen entfernten Querschnitte besitzen daher eine unnütze Größe, die man zu vermeiden suchen muß. Finden wir daher das Gesetz der hierbei nöthigen Abnahme der Querschnitte.

Behält man die bisherigen Bezeichnungen bei, setzt aber für irgend einen Querschnitt, der bei den mit einem Ende befestigten Körpern von der Befestigungsebene, oder bei aufliegenden Körpern von dem Punkte, wo Q wirkt, um x entfernt ist, die Höhe $= y$, die Breite $= z$, so erhält man für Parallelogramme (mit horizontalen und vertikalen Seiten) die Bedingungsgleichung

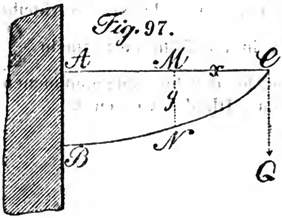
$$(1) \quad \frac{bh^2}{l} = \frac{zy^2}{x}.$$

Eben so für Kreise, wenn r und y die bezüglichen Radien bezeichnen,

$$(2) \quad \frac{r^3}{l} = \frac{y^3}{x}.$$

§. 121.

Nachstehende Aufgaben mögen zur weiteren Erläuterung des vorigen §. dienen.



Aufgabe 1. Der Körper Fig. 97. sei an einem Ende befestigt, am andern Ende wirke die brechende Kraft Q, und seine Querschnitte, rechtwinkelig auf AC, mögen Rechtecke von gleicher Breite $= b$ sein.

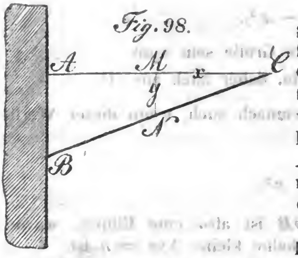
Für diesen Fall ist $AB = h$, $AC = l$, $z = b$ und deshalb, wenn MN ein beliebiger Querschnitt ist, nach (1)

$$\frac{bh^2}{l} = \frac{by^2}{x};$$

$$\text{I.} \quad y^2 = \frac{h^2}{l} x,$$

Die Begrenzungslinie BC ist daher eine gemeine Parabel, deren Scheitel in C liegt und deren Parameter $\frac{h^2}{l}$ ist.

Fig. 98.



Aufgabe 2. Ueber den gleichfalls mit einem Ende befestigten Körper Fig. 98. sei ein Gewicht Q gleichmäßig verbreitet, seine Querschnitte mögen wieder Rechtecke von gleicher Breite $= b$ bilden, eben so sei $AB = h$, $AC = l$ und für einen beliebigen Querschnitt MN, $CM = x$, $MN = y$.

Ist q das Gewicht, womit die Längeneinheit belastet wird, so muß man für den ganzen Körper erhalten

$$(1)\quad \tfrac{1}{2} ql = \tfrac{1}{6} p \frac{bh^2}{l}.$$

Für den Körper CMN

$$(2)\quad \tfrac{1}{2} xq = \tfrac{1}{6} p \frac{by^2}{x}.$$

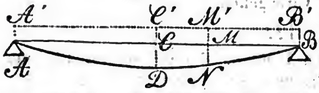
Da nach der Voraussetzung (1) und (2) gleich groß sind, so erhält man aus der Vergleichung dieser beiden Werthe

$$\frac{bh^2}{l^2} = \frac{by^2}{x^2};$$

$$\text{II.}\quad y = \frac{h}{l} \cdot x.$$

Die Begrenzungslinie BC ist also in diesem Falle eine gerade Linie.

Fig. 99.



Aufgabe 3. Der Körper AB Fig. 99. liege mit beiden Enden frei auf, seine Querschnitte mögen ebenfalls Rechtecke von gleicher Breite $= b$ sein, und einem Gewichte Q soll, wenn man sich dasselbe über die Länge nach und nach fortbewegt denkt, überall mit gleicher Festigkeit das Gleichgewicht gehalten werden.

Es sei $AC = BC = \frac{1}{2} l = a$, $CD = h$ und für einen beliebigen Querschnitt MN, $CM = x$, $MN = y$.

Aus I. §. 117. erhält man unmittelbar, indem $a + x$ für a, $a - x$ für a_1 gesetzt wird,

$$Q = \tfrac{1}{6} p\, y^2 \frac{bl}{a^2 - x^2};$$

Hieraus aber

$$(1) \quad y^2 = \frac{6\,Q}{p\,bl}(a^2 - x^2),$$

wobei natürlich Q eine constante Größe sein muß.

Für $x = o$ muß $y = h$ sein, daher auch aus (1)

$$(2) \quad \frac{h^2}{a^2} = \frac{6\,Q}{p\,bl},$$ demnach auch, wenn dieser Werth in (1) gesetzt wird

$$\text{III.} \quad y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Die Begrenzungscurve ADB ist also eine Ellipse, wovon die halbe große Axe $= a$, die halbe kleine Axe $= h$ ist.

Bei allen bis jetzt betrachteten Körpern von gleichem Widerstande lief das eine Ende oder beide Enden in eine Schneide aus, was jedoch in der Regel zu praktischen Unmöglichkeiten führt. In solchen Fällen kann man sich auf folgende Weise helfen.

Soll im letzteren Beispiele die kleinste Höhe nicht Null, sondern $CC' = c$ sein, so erhält man, wenn jetzt $M'N = y$ und $MN = y'$ gesetzt wird, $y' + c$ als Höhe, daher aus III.

$$(y' + c)^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Hieraus ferner für $y' = o$

$$x = \frac{a}{h}\sqrt{(h^2 - c^2)}$$

als Abscisse der Punkte A und B, von wo aus die Höhe unverändert $= c$ bleiben soll.

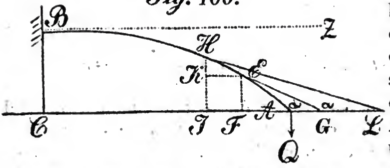
Nähere Betrachtungen der Biegungen, welche dem Bruche der Körper vorangehen.

§. 122.

Da es sich sehr oft darum handelt, die Größe der Biegung zu bestimmen, welche dem Bruche eines jeden elastischen Körpers vorausgeht, so mögen die vorzüglichsten Untersuchungen hierüber nachstehend folgen.

Vor Allem ist hierzu nothwendig, die Gestalt der Curve, der elastischen Linie, zu bestimmen, welche die Durchschnittslinie der Vertikalebene mit der neutralen Faserschicht des Körpers bei der Biegung bildet.

Fig. 100.



Es sei deshalb BZ Fig. 100. die Richtung der zunächst nur an einem Ende B befestigten gewichtlos gedachten neutralen Faser AB im natürlichen oder ungebogenen Zustande.

Durch ein an dem andern Ende A derselben angehangenes Gewicht Q und ferner ein über die ganze Länge gleichmäßig verbreitetes anderes Gewicht, wovon auf die Längeneinheit der Theil q kommt, erhalte die Faser die Gestalt der elastischen Linie AB.

Um die Gleichung dieser Linie abzuleiten, sei die durch A gezogene Horizontallinie AC die Abscissenaxe des rechtwinkeligen Coordinatensystems, so wie A der Ursprung desselben. Für einen beliebigen Punkt E der Curve, dessen Krümmungshalbmesser $= \varrho$ ist, sei ferner $AF = x$, $FE = y$, überdieß die größte Ordinate $BC = u$ und $AC = a$.

Nimmt man die Krümmung der Curve so gering an, daß die Horizontalprojection AC ohne merklichen Fehler als Länge derselben angenommen werden kann, so wird man für das Gewicht des Bogens $AE = s$ den Werth qx setzen können, so wie für das statische Moment desselben in Bezug auf den Punkt A, wenn man das gedachte Gewicht in der Hälfte von AB wirkend annimmt, $\frac{1}{2}\, qx^2$. Das Moment von Q, auf die Entfernung AF bezogen, ist aber Qx, daher die Summe $= M$ beider

$$M = Qx + \tfrac{1}{2}\, qx^2;$$

folglich auch das Elasticitätsmoment nach II. §. 108

$$(1)\quad W = \varrho M = \varrho\,(Qx + \tfrac{1}{2}\, qx^2).$$

Es sei nun ferner EG die geometrische Tangente des Punktes E, so wie HL die eines zweiten Punktes H, der so nahe bei F liegt, daß dessen Abscisse um den unendlich kleinen Theil $IF = \delta$ größer als x, also $x + \delta$ ist.

Für diese Annahme erhält man aber nach der entsprechenden Note des §. 108

$$\varrho = \pm \frac{s}{\alpha - \alpha_1},$$

wofür man, wegen Kleinheit der Größen, setzen kann

$$\varrho = \pm \frac{\delta}{tg\alpha - tg\alpha_1}.$$

Wird dieser Werth in (1) eingeführt, so folgt

$$W = \pm \frac{\delta}{tg\alpha - tg\alpha_1} \left\{ Qx + \tfrac{1}{2} qx^2 \right),$$

sowie hieraus

$$(2)\ \pm (tg\alpha - tg\alpha_1) = \frac{Q}{W} \cdot x\delta + \frac{q}{2W} \cdot x^2 \delta.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke für x auf einander folgend δ, 2δ, $3\delta \ldots$, so muß der rechte Theil die Summe der Größen sein, um welche sich die trigonometrische Tangente des Winkels ändert, welchen die geometrische Tangente in den verschiedenen Punkten mit der Abscissenaxe bildet. Was sodann den linken Theil der Gleichung betrifft, so bezeichne C die trigonometrische Tangente für den Endpunkt A, wodurch die Summe der Aenderungen in diesem Theile $C - tg\alpha$ sein muß, weil jedenfalls die trigonometrische Tangente des Punktes A die größte ist.

Es folgt demnach, wenn man die durch die Substitution entstehenden Reihen entsprechend summirt und zuletzt $n\delta$ für x setzt

$$(3)\ C - tg\alpha = \frac{Q}{2W} \cdot x^2 + \frac{q}{6W} x^3.$$

Um C näher zu bestimmen, bemerke man, daß, wenn man $x = a$ setzt, $tg\alpha = o$ werden muß, demnach für diesen Fall

$$C = \frac{Q}{2W} a^2 + \frac{q}{6W} a^3.$$

Setzt man diesen Werth in (3) und ordnet entsprechend, so folgt

$$tg\alpha = \frac{Q}{2W} a^2 + \frac{q}{6W} a^3 - \frac{Q}{2W} \cdot x^2 - \frac{q}{6W} x^3.$$

Der Figur nach ist aber $tg\alpha = \frac{HK}{EK} = \frac{\delta}{EK}$, deshalb auch

$$EK = \delta \left(\frac{Q}{2W} a^2 + \frac{q}{6W} a^3 \right) - \frac{Q}{2W} x^2 \delta - \frac{q}{6W} x^3 \delta.$$

Wird hier nochmals δ, 2δ, $3\delta \ldots$ für x gesetzt, so ist der linke Theil der Gleichung, die Summe von EK, als die Ordinate $EF = y$ anzusehen, demnach, wenn sonst wie oben verfahren wird,

$$\text{I.}\ y = \frac{Qx}{2W} (a^2 - \tfrac{1}{3} x^2) + \frac{qx}{6W} (a^3 - \tfrac{1}{4} x^3),$$

die gesuchte Coordinatengleichung der elastischen Linie.

Die größte Ordinate $= u$, oder die Tiefe der Einsenkung der elastischen Linie findet sich aus der allgemeinen Gleichung, wenn man nämlich $x = a$ setzt, zu

$$\text{II.}\quad u = \frac{Qa^3}{3W} + \frac{qa^4}{8W}.$$

Für den Fall, daß in I. und II. $q = o$ ist, erhält man

$$\text{III.}\quad y = \frac{Qx}{6W}(3a^2 - x^2);$$

$$\text{IV.}\quad u = \frac{Qa^3}{3W}.$$

Ist dagegen $Q = o$, so folgt

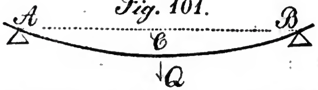
$$\text{V.}\quad y = \frac{qx}{24\,W}(4a^3 - x^3);$$

$$\text{VI.}\quad u = \frac{qa^4}{8W}.$$

Aus der Vergleichung von IV. mit VI. folgt aber, wenn man überdieß $Q = qa$ setzt, daß sich die größte Ordinate für den ersten Fall zu der des zweiten wie 8 : 3. verhält, die Einsenkung also weit größer ist, wenn ein und dasselbe Gewicht an dem Ende aufgehangen wird, als wenn es über die ganze Länge gleichförmig vertheilt ist.

§. 123.

Fig. 101.



Liegt die elastische Faser wie in Fig. 101. mit beiden Enden auf, und ist das Gewicht Q in der Mitte aufgehangen, so lassen sich die entsprechenden Gleichungen unmittelbar aus dem vorigen §. ableiten.

Das Gewicht Q und das gleichförmig verbreitete Gewicht ql, wenn nämlich l die Länge AB der Faser bezeichnet, erzeugen, wie leicht nachzuweisen, auf jeden der Unterstützungspunkte A und B die Pressung $\frac{1}{2}(Q + ql)$. Man kann aber auch die Stützen wegdenken, die Faser in C festgehalten und in A und B die bezeichnete Pressung aufwärts wirkend annehmen, und man wird dann für gegenwärtigen Fall in I. des vorigen §. $\frac{1}{2}(Q + ql)$ statt Q zu setzen haben. Was den zweiten Theil der allgemeinen Gleichung betrifft, so muß dieser, nach der gegenwärtigen Voraussetzung, negativ genommen werden, da derselbe q als Factor enthält, welches der Natur der Sache nach vertikal abwärts, also $\frac{1}{2}(Q + ql)$ entgegengesetzt wirkt. Sonach erhält man aber, wenn zugleich beachtet wird, daß $\frac{1}{2}\,l$ statt a zu setzen ist,

$$\text{I. } y = \frac{(Q + ql)}{4W}\left(\frac{l^2}{4} - \tfrac{1}{3}x^2\right)x - \frac{qx}{6W}\left(\frac{l^3}{8} - \tfrac{1}{4}x^3\right).$$

Eben so folgt die größte Ordinate, wenn $x = \frac{1}{2}l$ gesetzt wird,

$$\text{II. } u = \frac{l^3}{384W}(8Q + 5ql).$$

Für den Fall, daß $q = o$ ist, erhält man aus I.

$$\text{III. } y = \frac{Q}{4W}(\tfrac{1}{4}l^2 - \tfrac{1}{3}x^2)x;$$

$$\text{IV. } u = \frac{Ql^3}{48W}.$$

Für $Q = o$, wird

$$\text{V. } y = \frac{qx}{24W}(l^3 - 2lx^2 + x^3);$$

$$\text{VI. } u = \frac{5pl^4}{384W}.$$

Nimmt man in IV. und VI. $Q = pl$ an, so ergiebt sich das Verhältniß der Senkung in beiden Fällen wie 8 : 5, d. h. wenn ein Gewicht gleichförmig über die ganze Länge vertheilt ist, so ist die Tiefe der Einsenkung, bei sonst gleichen Umständen, nur $\frac{5}{8}$ von der Einsenkung, wenn ein eben so großes Gewicht in der Mitte angebracht wird.

§. 124.

Mit Hülfe der Formeln in den beiden vorstehenden Paragraphen lassen sich die meisten der bei Constructionen vorkommenden Fragen leicht beantworten, wenn man nur für das Elasticitätsmoment W die entsprechenden Werthe einführt.

Ist z. B. der Querschnitt des Körpers ein Rechteck, so folgt aus II. §. 108. und (2) §. 110. und wenn sonst die früheren Bezeichnungen beibehalten werden,

$$W = \tfrac{1}{12}Ebh^3.$$

Ist aber der Querschnitt ein Kreis, so erhält man nach §. 114.

$$W = \tfrac{1}{4}Er^4\pi.$$

Liegt daher ein prismatischer Körper mit beiden Enden auf und ist derselbe in der Mitte mit einem Gewichte Q belastet, so folgt aus IV. §. 123. die Tiefe der Einbiegung

(1) $u = \frac{Ql^3}{4Ebh^3}$, wenn der Querschnitt ein Rechteck ist,

(2) $u = \frac{Ql^3}{12Er^4\pi}$ für einen kreisförmigen Querschnitt.

Hat man, um die Tiefe der Einsenkung zu berechnen, das Gewicht $= G$ des prismatischen Körpers zu berücksichtigen, so ist nach vorigem Paragraphen $\frac{5}{8}$ G dem Q beizufügen, so daß man erhält

(3) $u = \frac{(Q + \frac{5}{8} G) l^3}{4Ebh^3}$ für den rectangulären Querschnitt.

(4) $u = \frac{(Q + \frac{5}{8} G) l^3}{12Er^4\pi}$ für den kreisförmigen Querschnitt.

Aus diesen Formeln erhellt zugleich, wie man den Elasticitätsmodul E, dessen Werth für verschiedene Materialien in der Tabelle des §. 106. angegeben wurde, durch Versuche zu bestimmen im Stande ist.

Beispiel. Ein aus Eichenholz gezimmerter Balken, der 6^m lang, $0^m,2$ hoch, $0^m,16$ breit ist und mit seinen beiden Enden frei aufliegt, soll in der Mitte mit einem Gewichte belastet werden, welches ihn daselbst nicht mehr als $0^m,02$ senkt (durchbiegt); wie groß darf man dies Gewicht nehmen?

Auflösung. Läßt man das eigene Gewicht des Balkens unbeachtet, so erhält man unmittelbar aus (1), wegen $E = 1300$, und wenn man der Sicherheit wegen von dieser Größe den dritten Theil in Rechnung bringt.

$$Q = \frac{4.433.160.(200)^3.20}{(6000)^3} = 205,3 \text{ Kilogramm.}$$

Die rückwirkende Festigkeit.

§. 126.

Bei den Untersuchungen über rückwirkende Festigkeit denken wir uns senkrecht und frei stehende prismatische Körper, deren obere, geraden Endflächen gleichförmig durch Gewichte belastet sind. Bei entsprechender Größe oder Vermehrung dieser Gewichte muß eine Trennung der Theile, eine völlige Zerstörung dieser Körper erfolgen und zwar durch unmittelbares Zerdrücken (Zerquetschen, Zerkleinen) des Körpers, ohne ihn vorher zu biegen oder durch Zerdrücken und Biegen zugleich, oder endlich durch das Biegen (Zerknicken) allein.

Alle ältere wie die neuesten Versuche *) über diese Art von Festigkeit zeigen, daß, sobald die Höhe der Körper ein ge-

*) Unter den neuesten derartigen Versuchen verdienen vor allem die des Engländers Hodgkinson rühmliche Erwähnung. Derselbe fand zu gleicher Zeit, daß die beim Zerdrücken (kurzer) Körper erhaltenen Bruchstücke Keile, Pyramiden oder Kegel bildeten, deren Seiten zu ihren respectiven Basen unter ziemlich konstanten Winkeln (von 48 bis 58 Graden) geneigt waren. Ein anderes beachtungswerthes Ergebniß dieser Versuche ist das, daß die Zerdrückungsfestigkeit (kurzer) Holzbalken (behauener Stämme) im feuchten (nicht trockenen) Zustande nur die Hälfte von der beträgt, welche dieselben zeigen, wenn sie völlig trocken sind.

wisses Vielfaches ihrer kleinsten Dicke nicht überschreitet, die Trennung oder Zerstörung allein durch Zerdrücken (in entsprechende Stücke) erfolgt, ohne daß zuvor eine (merkliche) Biegung eintritt und daß sich die Widerstände, welche Körper von gleichem Materiale unter bemerkter Voraussetzung zeigen, wie ihre normalen Querschnittsflächen zu einander verhalten.

Bezeichnet daher A den Querschnitt eines solchen Prismas in Quadratmillimetern ausgedrückt, ferner m_2 die Kraft in Kilogrammen, womit Körper von gleicher Materie bei 1 Quadratmillimeter Querschnitt zerdrückt werden, so erhält man fürs Gleichgewicht die Kraft $= Q$ zum Zerdrücken des fraglichen Körpers, oder dessen rückwirkende Festigkeit, zu

$$Q = m_2 . A.$$

In nachstehender Tabelle sind die aus Versuchen gefundenen Werthe von m_2 für einige in der Technik besonders oft vorkommende Körper verzeichnet.

Name des Körpers	Werth von m_2 in Kilogr.	Name des Körpers	Werth von m_2 in Kilogr.
Basalt	16 bis 20	Sandstein	2 bis 8
Granit	4 „ 7	Ziegelstein	0,4 „ 1,7
Gneiß	3 „ 4	Eichenholz	3,8 „ 4,6
Kalkstein	1 „ 4	Tannenholz	4,6 „ 5,4
Marmor	3 „ 8	Gußeisen	50 „ 100

Von diesen Coefficienten hat man, um sicher zu gehen, bei Steinen und Hölzern $\frac{1}{10}$, bei Gußeisen $\frac{1}{5}$ in Rechnung zu bringen. Ueberhaupt dürften aber bei wichtigen Constructionen unmittelbare Versuche mit den zu verwendenden Materialien hier noch weit nöthiger sein, als dieß bei der absoluten und respectiven Festigkeit der Fall ist.

Zusatz. Für die meisten practischen Fälle wird es ausreichen, mit folgenden Mittelwerthen zu rechnen*).

Bei Hölzern: $Q = 0{,}3\ A$,
„ Gußeisen: $Q = 20 . A$,
„ Schmiedeeisen: $Q = 10 . A$.

*) Bei diesen Angaben haben wir, der Natur der Sache nach, Steine ausgeschlossen. Bemerkenswerth dürfte jedoch Folgendes sein. Der größte Druck, welchen die Steine der (berühmten) Neuilly-Brücke (nach Perronnet) mit Sicherheit tragen, beträgt 0",0928 Kil. auf den Quadratmillimeter, und nach Versuchen von Soufflot müßte er 1,113 Kil. sein, um diese Steine zu zerdrücken. Bei den Pfeilern der Peterskirche in Rom beträgt für dieselbe Fläche (nach Rondelet) dieser Druck 0",1636 Kil., bei den Pfeilern der Paulskirche in London: 0,1936 Kil., und bei denen des Pantheons in Paris: 0,2944 Kilogr. Ausführliche Tabellen über die Tragkraft von Steinen, Mauerwerk, Mörtel etc. findet man in Rondelet's Art de bâtir.

§. 127.

Die Gesetze der rückwirkenden Festigkeit (Zerknickungsfestigkeit) für Körper, deren Höhe die Dicke um ein beträchtliches übertrifft, haben zwar die ausgezeichnetsten Analytiker durch allgemeine Gleichungen darzustellen sich bemüht *), allein die hierdurch erlangten Resultate stimmten nicht überall so mit den Erfahrungen überein, als man dies für praktische Ausführungen wünschen mußte.

Für unsere Zwecke folgen wir daher (bis auf Weiteres) den Regeln ausgezeichneter Experimentatoren und Techniker (wie Rennie, Rondelet, Poncelet, Hodgkinson u. A.) und wenden zunächst für die bei Constructionen gewöhnlich vorkommenden Fälle, wo die Höhe (oder Länge) der zum Stützen und Tragen angewandten Körper selten das 24- bis 30fache der kleinsten Dicke überschreitet, die Formeln im Zusatze des vorigen §. an, jedoch mit folgenden Abänderungen der Coefficienten.

1) Bei Hölzern wird der Werth 0,3 so lange beibehalten als die Höhe das sechsfache der (kleinsten) Dicke nicht überschreitet. Von hier ab bis die Höhe die 12fache Dicke erreicht, wird gedachter Coefficient zu $\frac{5}{6}$ und von letzterer Grenze ab bis die Höhe 24 mal die Dicke übertrifft, die Hälfte jenes Coefficienten u. s. f. genommen.
2) Bei Gußeisen wird der Coefficient (20) zu $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{12}$ seines Werthes in Rechnung gebracht, je nachdem die Höhe des Körpers respective die 3-, 8- oder 36fache Dicke ausmacht.
3) Bei Schmiedeeisen endlich wird der Coefficient (10) zu $\frac{5}{8}$ oder $\frac{1}{2}$ genommen, je nachdem respective die Höhe das 12- oder 24fache der Dicke beträgt.

Ist der Querschnitt eines Körpers für eine gegebene Belastung hiernach berechnet, so kann man, zur (annähernden, aber meistens ausreichenden) Beurtheilung der dabei zu erwartenden Biegung, die Sätze des §. 105. in Anwendung bringen. Ein hier folgendes Beispiel wird zur nochmehrigen Erläuterung dieses Rechnungsverfahrens dienen.

Beispiel. Ein mit 10000 Kilogramm belasteter horizontaler Balken (Durchzug) soll durch einen senkrechten Ständer aus Eichenholz von 5 Meter Höhe unterstützt werden; es fragt sich, wie man den Querschnitt des letzteren zu nehmen hat.

Auflösung. Nimmt man zuerst $m_2 = 0{,}1$, so folgt, wenn man mit a die Seite des quadratischen Querschnittes bezeichnet, $a = \sqrt{\frac{Q}{m_2}} = 316{,}3$ Millimeter, d. h. der Ständer hätte ungefähr die 16fache Dicke zur Höhe. Hiernach ist aber zufolge der

*) Am meisten Empfehlung für Praktiker verdient noch: Navier, Resumé des Leçons donné à l'école des ponts et chaussées Paris, 1833. Première Partie.

obigen Regeln m_2 zu klein genommen. Wir setzen daher $m_2 = 0,2$ (d. h. $\frac{2}{3}$. 0,3). Sodann folgt aber, wie vorher verfahren, $a = 223,6$ Millim., d. i. der Ständer erhält die 22fache Dicke zur Höhe, was jedenfalls zulässig sein dürfte. Um uns in letzterer Beziehung noch mehr Ueberzeugung zu verschaffen, berechnen wir nach III. §. 105. die bei den gewählten Dimensionen eintretende Biegung. Letztere ergiebt sich aber zu

$$\varepsilon = \frac{10000}{1300\,(223,6)^2} = \frac{10000}{1300.\,50000} = \frac{1}{6500},$$ woraus nach §. 106.

folgt, daß eine solche Biegung völlig zulässig ist, da dieselbe für die Elasticitätsgrenze $\frac{1}{850}$ beträgt.

Zusatz. Nach Hodgkinsons Versuchen läßt sich das Gewicht $= W$ in engl. Tonnen (à 2240 engl. ℔) *) ausgedrückt, durch welches Säulen und Ständer zerknickt (allein durch Biegung zerstört) werden, mittels nachstehenden Formeln berechnen, in welchen überdies D den äußern Durchmesser der Säulen, oder die Seite des Quadrates vom Querschnitte bei Balken, in engl. Zollen, d den inneren Durchmesser hohler Säulen, ebenfalls in Zollen und L die Länge in Fußen bezeichnet.

Beschaffenheit der Säulen oder Balken	Beide Enden abgerundet und die Länge übertrifft den 15fachen Durchmesser **).	Beide Enden flach und die Länge übertrifft den 30fachen Durchmesser.
Massive cylindrische Säule aus Gußeisen	$W = 14,9\,\frac{D^{3,76}}{L^{1,7}}$	$W = 44,16\,\frac{D^{3,55}}{L^{1,7}}$
Hohle cylindrische Säule aus Gußeisen	$W = 13\,\frac{D^{3,76} - d^{3,76}}{L^{1,7}}$	$W = 44,34\,\frac{D^{3,55} - d^{3,55}}{L^{1,7}}$
Massive cylindrische Säule aus Schmiedeeisen	$W = 42,8\,\frac{D^{3,76}}{L^2}$	$W = 133,75\,\frac{D^{3,55}}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Danziger Eichenholze		$W = 10,95\,\frac{D^4}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Fichtenholze (Rothtanne)		$W = 7,81\,\frac{D^4}{L^2}$

Für kürzere Säulen als die Tabelle angiebt, wobei die Trennung theils durch Zerdrücken, theils durch Zerknicken erfolgt, giebt Hodgkinson zur Berechnung der Belastung $= W_2$ in Tonnen folgende

*) 1 Kilogramm = 2,20548 ℔ engl. (avoirdupois).
1 Meter = 3,28089 Fuß engl.

**) Die Abrundung der Enden geschah deshalb, um die Säulen daselbst drehbar machen zu können, etwa so, als wenn sie um ein Gelenk beweglich wären. Als Lenkstangen bei Dampfmaschinen und Pumpen, bei eisernen Dächern etc. finden dergleichen um Zapfen oder Bolzen bewegliche eiserne Balken practische Anwendung. Die Säulen mit ganz flach abgeschnittenen Enden waren beim Versuche völlig unbeweglich gemacht oder ganz fest gestellt.

Formel an, in welcher W die obige Bedeutung hat, W_1 aber das Gewicht (in Tonnen) bezeichnet, welches das Zerdrücken des Körpers bewirken würde, wenn er sich nicht biegen könnte:

$$W_2 = \frac{W W_1}{W + \frac{3}{4} W_1}$$

Andere werthvolle Ergebnisse dieser Versuche sind folgende.

1. Gußeiserne Säulen, die in der Mitte verstärkt und zwar daselbst $1\frac{1}{2}$ bis beinah 2 mal so dick als an ihren Enden sind, leisten gegen solche von überall gleichem Durchmesser, denselben Materiale, bei einerlei Gewicht und Länge, $\frac{1}{7}$ mehr Widerstand, wenn ihre Enden abgerundet und $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{8}$ mehr, wenn ihre Enden gerade abgeschnitten sind.

2. Die Festigkeit von Säulen, deren eines Ende flach abgeschnitten (und unbeweglich), das andere Ende abgerundet (und beweglich) gemacht ist, ist das arithmetische Mittel zwischen der Festigkeit von Säulen, die an beiden Enden flach abgeschnitten und solcher die an beiden Enden abgerundet sind *).

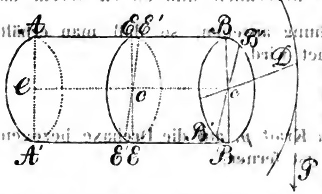
3. Säulen, die an beiden Enden abgerundet und deren Querschnitte von der Form ┼ sind, besitzen weniger Festigkeit als hohle cylindrische Säulen von gleichem Materiale und gleichem Gewichte. Beträchtlich größer wird die Festigkeit, wenn die Querschnitte die Form ├┤ haben, steht jedoch immer noch sehr gegen die hohler cylindrischer Säulen zurück.

Ausführliches über diese für Techniker höchst beachtungswerthen Versuche (zugleich mit mehreren Abbildungen, wobei auch der Versuchsapparat) giebt Barlows Bericht in den Philosophical Transactions for the year 1840. p. 385.

Die Torsionsfestigkeit.

§. 128.

Fig. 103.



Es sei AB Fig. 103. ein prismatischer Körper, der an einem seiner Enden AA' festgehalten wird, an dessen anderem Ende aber, und zwar am Hebelarme $cD = R$, eine Kraft P wirkt, die eine Verdrehung um die Axe Cc zu erzeugen im Stande ist.

Ist durch eine derartige Drehung der Durchmesser BB des äußeren Normalschnittes in die Lage $B'B'$ gebracht, so wird der Durchmesser AA' der befestigten Endfläche unverändert geblieben sein, die gleichliegenden Durchmesser aller zwischen-

*) Anwendungen hiervon bieten die meisten Kolbenstangen, auch gilt dieser Erfahrungssatz nicht bloß, wenn das Material Gußeisen ist, sondern auch für Schmiedeeisen, Stahl und Holz.

liegenden Normalschnitte aber ihre Lage um so mehr verändert haben, je weiter sie von der Befestigungsfläche entfernt sind. Den Winkel *BcB'*, welchen dabei die Durchmesser der freien Endfläche beschreiben, nennt man insbesondere den Drehungswinkel.

Denkt man sich ferner zwei solche gleichartige Prismen in zu ihren Axen parallele Fasern zerlegt und nimmt an, daß von jedem eine einzelne Faser beziehlich drehenden Kräften p und p_1 unterworfen ist, so müssen diese Kräfte um so größer sein, je größer der Querschnitt der Fasern ist, je größer der Drehungswinkel sein soll und je entfernter die Fasern von der Drehaxe liegen und zwar letzteres deshalb, weil die Lagenveränderung einer Faser um so bedeutender sein muß, je entfernter sie von der Axe liegt; dagegen werden die Kräfte in dem Maße geringer zu sein brauchen, je mehr Länge die Fasern besitzen.

Bezeichnet man daher die Querschnitte der gedachten Fasern mit i und i_1, ihre Entfernungen von der Drehaxe mit ϱ und ϱ_1, die Drehungswinkel, in Sexagesimalgraden ausgedrückt, mit ω, ω_1 und die Längen mit l und l_1, so wird man setzen können

$$p : p_1 = \frac{\omega i \varrho}{l} : \frac{\omega_1 i_1 \varrho_1}{l_1}.$$

Diese Proportion giebt

$$p = \frac{p_1 l_1}{\omega_1 i_1 \varrho} \cdot \frac{\omega}{l} \cdot i\varrho.$$

Hat man daher p_1, l_1, ω_1, i_1 und ϱ_1 durch Versuche ermittelt, so kann man $\frac{p_1 l_1}{\omega_1 i_1 \varrho_1}$ berechnen und diesen Werth als den Coefficienten der Verdrehung ansehen, so daß man erhält, wenn derselbe mit t bezeichnet wird,

$$(1)\quad p = t\frac{\omega}{l} \cdot i\varrho.$$

Das statische Moment der Kraft p, auf die Drehaxe bezogen, für die um ϱ entfernte Faser ist ferner

$$p\varrho = t\frac{\omega}{l} \cdot i\varrho^2.$$

Für einen und denselben Körper müssen aber t, ω und l constante Größen sein, so daß es zur Herleitung der Momente für die übrigen Fasern oder des Momentes des ganzen Körpers nur auf die Bestimmung von i und ϱ^2 ankommen wird. Bezeichnet man die Summe der Momente aller Fasern durch $\Sigma(i\varrho^2)$,

so wird man in Bezug auf die am Hebelarme R wirkende Gesammtdrehungskraft P erhalten

$$\text{I.}\quad PR = t\,\frac{\omega}{l}\,\Sigma(i\varrho^2),$$

ein Ausdruck, der das Torsionsmoment des prismatischen Körpers sein muß.

§. 129.

Nach dem Vorstehenden hat man, um für spezielle Fälle das Torsionsmoment zu berechnen, nur nöthig den Werth von $\Sigma(i\varrho^2)$, d. i. das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche des prismatischen Körpers in Bezug auf eine Axe zu finden, welche im Schwerpunkte der Figur normal auf der Ebene derselben steht.

Für Querschnitte solcher Körper, deren Torsionsmomente bei technischen Constructionen am meisten nöthig werden, sind aber die Ausdrücke der betreffenden Trägheitsmomente entweder in dem Früheren schon völlig berechnet worden, oder es lassen sich solche aus den Resultaten an gedachten Orten unmittelbar ableiten. Folgende Aufgaben mögen zur weiteren Erläuterung dienen.

Aufgabe 1. Der Querschnitt des Körpers bilde ein Rechteck von der Breite und Höhe respective b und h.

Auflösung. Denkt man sich durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der Ebene desselben zwei auf einander normale Axen gelegt, die gleichzeitig den Seiten des Rechtecks respective parallel sind, so erhält man für die Trägheitsmomente bezogen auf diese Axen nach §. 110. bezüglich: $\frac{1}{12}bh^3$ und $\frac{1}{12}b^3h$, daher also nach I. §. 113:

$$\Sigma(m\varrho^2) = \tfrac{1}{12}bh(b^2+h^2), \text{ folgl.}$$

$$\text{I.}\quad PR = \frac{t}{12}\cdot\frac{\omega}{l}\cdot bh(b^2+h^2).$$

Für das Quadrat, dessen Seite $= a$ ist:

$$\text{II.}\quad PR = \frac{t}{6}\cdot\frac{\omega}{l}\cdot a^4.$$

Aufgabe 2. Der Querschnitt des Körpers bilde ein reguläres Sechseck, der Radius des umschriebenen Kreises sei $= r$.

Auflösung. Unmittelbar aus (1) §. 115. Zusatz 2. folgt $\Sigma(i\varrho^2) = \frac{5\sqrt{3}}{8}\cdot r^4$, demnach

$$\text{III.}\quad PR = \frac{5\sqrt{3}}{8}\cdot t\cdot\frac{\omega}{l}\cdot r^4.$$

Aufgabe 3. Der Querschnitt bilde einen Kreis vom Halbmesser $= r$.

Auflösung. Mit Zuziehung von (1) §. 114. erhält man sofort

$$\text{IV. } PR = \frac{t}{2} \cdot \frac{\omega}{l} \cdot r^4 \pi.$$

Für einen hohlen Cylinder, dessen Radien r_1 und r sind, folgt daher:

$$\text{V. } PR = \tfrac{1}{2} t \frac{\omega}{l} \pi (r_1^{\,4} - r^4).$$

Soll der hohle Cylinder mit dem massiven vom Radius r bei einerlei Länge gleiches Gewicht haben, so ist $\pi (r_1^{\,2} - r^2) l = \pi r^2 l$, d. i. $r_1^{\,2} = 2r^2$ zu setzen. Dieß giebt aber

$$PR = \tfrac{1}{2} t \frac{\omega}{l} \pi . 3r^4.$$

Ist also der innere Radius eines hohlen Cylinders eben so groß als der Radius eines gleichlangen massiven Cylinders von demselben Gewichte, so wird er von einerlei Kraft nur $\frac{1}{3}$ mal so viel verdreht.

§. 130.

Eine völlige Zerdrehung des Körpers muß begreiflicher Weise entstehen, wenn die von der Axe entferntesten Fasern nicht mehr nachgeben können, ohne daß eine wirkliche Trennung erfolgt.

Bezeichnet man den Widerstand der Drehung, bezogen auf die Einheit der Fläche vom Querschnitt des Körpers, für den Augenblick der Zerdrehung mit t_1 die Entfernung der Faser, wo eine Trennung zuerst entsteht, mit r_1, so ist für eine andere Faser vom Querschnitte i, in der Entfernung ϱ, der Widerstand

$$\frac{t_1}{r_1} . i\varrho,$$

so wie das entsprechende statische Moment

$$\frac{t_1}{r_1} . i\varrho^2.$$

Für den ganzen Körper, wenn P die Kraft ist, welche, am Hebelarme R wirkend, die Trennung erzeugt, folgt ähnlich wie im vorigen §. das Trennungsmoment

$$PR = \frac{t_1}{r_1} \Sigma (i\varrho^2).$$

Bildet der normale Querschnitt einen Kreis, so ist ebenfalls nach vorigem §.

$$r_1 = r,\ \Sigma (i\varrho^2) = \tfrac{1}{2} r^4 \pi, \text{ demnach}$$

$$\text{I. } PR = T' \frac{\pi r^3}{2}.$$

Bei Cylindern von gleicher Materie verhalten sich also die statischen Momente der Kräfte, welche eine Trennung durch Verdrehung bewirken, wie die dritten Potenzen der Halbmesser.

Ist der normale Querschnitt ein Quadrat von der Seite $= a$, so erhält man, wegen $r_1 = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, $\Sigma(i\varrho^2) = \frac{1}{6} a^4$,

$$\text{II. } PR = T . \frac{a^3}{3\sqrt{2}},$$

woraus sich ein ähnlicher Satz, wie beim Cylinder ableiten läßt.

§. 131.

Für vorkommende Rechnungen mögen hier noch nachstehende zwei Tabellen folgen, welche sich auf Längenmaße in Millimetern, Winkel in Sexagesimalgraden ausgedrückt, und auf Kilogramme als Gewichte beziehen.

Tafel

für die Werthe des Verdrehungscoefficienten t.

Name des Körpers.	Werth von t.	Name des Körpers.	Werth von t.
Buche	1,56	Lärche	1,39
Eiche	0,88 bis 1,47	Tanne	0,82 bis 1,50
Erle	1,19	Ulme (Rüster) .	0,99
Esche	1,49	Schmiedeeisen	104,0 bis 143,6
Fichte	0,70 bis 1,10	Gußeisen . . .	69,2 „ 70,8
Kiefer (Föhre)	1,00	Stahl	119,1 „ 146,0

Tafel

der Werthe des Coefficienten t_1 für den Bruch durch Verdrehung.

Name des Körpers.	Werth von t_1.	Name des Körpers.	Werth von t_1.
Gußeisen . . .	20,0 bis 45,0	Messing	21,46
Schmiedeeisen	44,9	Kupfer, gegossen	19,75
Stahl	79,85	Zinn	6,58

Beispiel 1. Wie groß ist die Verdrehung einer schmiedeeisernen cylindrischen Welle von 6^m Länge und $0^m,04$ Radius, wenn eines ihrer Enden ein Rad von $0^m,6$ Durchmesser trägt und auf letzteres eine Kraft von 60 Kilogrammen wirkt?

Aus IV. §. 129. erhält man sofort:

$$\omega = \frac{2lPR}{t\pi r^4}.$$

Für unser Beispiel ist $l = 6000$, $P = 60$, $R = 300$, $r = 40$, und zufolge der entsprechenden Tabelle werde $t = 130$ angenommen. Sodann ergiebt sich

$$\omega = \frac{2.6000.60.300}{130.\frac{22}{7}.(40)^4} = 0{,}206 \text{ Grad.}$$

Nach den Versuchen von *Gerstner* soll der Drehwinkel bei allen Wellen, sowohl hölzernen als eisernen, nicht mehr als 0,117 Grad betragen, während *Tredgold* 1 Grad noch für statthaft und nur wenn viel Räderwerk auf einer Welle sitzt, $\frac{1}{4}$ Grad als die nicht zu überschreitende Grenze bezeichnet.

Beispiel 2. Die vertikalstehende, cylindrische, gußeiserne Welle eines horizontalen Wasserrades trägt an ihrem oberen Ende ein Rad von $0^m{,}7$ Radius, welches einen Widerstand von 922 Kilogrammen zu überwältigen hat, wie groß ist der Radius der Welle zu nehmen?

Aus I. des vorigen §. erhält man

$$r = \sqrt[3]{\frac{2PR}{t_1\pi}}.$$

Für vorstehendes Beispiel ist $P = 922$, $R = 700$, und aus der zweiten Tabelle nehme man $t_1 = 20$, von welchem letzteren Werthe jedoch, der Sicherheit wegen, nur der zehnte Theil in Rechnung gebracht werden mag.

Hiernach ergiebt sich der Radius zu

$$r = \sqrt[3]{\frac{2.922.700}{2.3{,}14}} = 59{,}0 \text{ Millimeter.}$$

Digitized by Google

UNIV. OF MICH.
DEC 26 1908
UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06359 6863

62